# 1-1 集合的基本概念

**一、基本觀念：**

1.**集合與元素：**

**將一群明確而可鑑別的事物看成一個整體，這個整體就稱為一個集合，**
**通常用大寫英文字母表示，如：**$A$
**而這些事物則稱為此集合的元素，通常用小寫英文字母表示，如：**$x$

2.**集合的表示法：**

**列舉法：將集合中的每一元素逐一列在大括號{}中**
**例如**$\{2, 4, 6, 8, 10\}$**表示小於等於** 10 **的正偶數所成集合**
**描述法：先以一文字表集合的元素；再於其後描述其具有的性質**
**例如**$\{x|0<x\leqq 10$，$x$ **為偶數**$\}$**亦表示小於等於** 10 **的正偶數所成集合**
**彬註：元素無次序性**

3.**屬於與不屬於：**

**若** $x$ **為集合** $A$ **中的一個元素，記作** $x\in A$，**讀作** $x$ **屬於** $A$
**反之，記作** $x\notin A$，**讀作** $x$ **不屬於** $A$

4.**子集：設** $A$，$B$ **為兩集合**

**若** $A$ **中的任一元素都屬於** $B$，**則稱** $A$ **為** $B$ **的子集**
**記作** $A\subset B$ **或** $B\supset A$，**讀作** $A$ **包含於** $B$ **或** $B$ **包含** $A$
**若**$\exists a\in A$，**但** $a\notin B$，**則** $A$ **不是** $B$ **的子集，記作** $A\not\subset B$
**彬註** 1：$\varnothing$**為任何集合的子集合**
**彬註** 2：**對任何集合** $A$，**均滿足** $A\subset A$

5.**冪集合：集合** $A$ **的所有子集所成集合稱為冪集合，以** $2^A$ **表之**

Ex1. **設** $A=\{1, 2, 3\}$，**則** $A$ **的所有子集共有幾個？**$Ans$：8

6.**集合的相等：設** $A$，$B$ **兩集合的元素完全相同(不考慮元素的排列順序及重複次數)**
**則稱** $A$、$B$ **為相等的集合，記作** $A=B$。**亦即"**$A\subset B$ **且** $B\subset A$**"**

Ex2. $A=\{x-1, y-2\}$，$B=\{x+y, 2x+3\}$，**若** $A=B$，**則**$(x, y)=$**？**$Ans$：$(-3, -1)$

Ex3. $A=\{x, y\}$，$B=\{x+1, 2, 3\}$，**若** $A=B$，**試求** $x$，$y$ **之值？**$Ans$：$x=2$，$y=3$

7.**常用的集合：**

$\varnothing$：**空集合：不含任何元素的集合為空集合，記作**$\varnothing$**或**{}
$N$：**所有自然數所成的集合**
$Z$：**所有整數所成的集合**
$Q$：**所有有理數所成的集合**
$R$：**所有實數所成的集合**
$C$：**所有複數所成的集合**
**彬註：數系** $N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$
$(a, b)=\{x|a<x<b\}$，**其中** $a$，$b\in R$，$a<b$；**此稱為開區間**
$[a, b]=\{x|a\leqq x\leqq b\}$，**其中** $a$，$b\in R$，$a<b$；**此稱為閉區間**
$[a, b)=\{x|a\leqq x<b\}$，**其中** $a$，$b\in R$，$a<b$
$(a, b]=\{x|a<x\leqq b\}$，**其中** $a$，$b\in R$，$a<b$

**二、集合的運算**

1.**交集：由集合** $A$、$B$ **的所有共同元素所組成的集合稱為** $A$ **與** $B$ **的交集，**
**記作** $A\cap B$**，讀作** $A$ **交集** $B$**。此即** $A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}$

2.**聯集：由集合** $A$、$B$ **的所有元素組成的集合稱為** $A$ **與** $B$ **的聯集，**
**記作** $A\cup B$**，讀作** $A$ **聯集** $B$**。此即** $A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}$

3.**差集：在集合** $A$ **中但不在集合** $B$ **中的所有元素所成的集合，**
**記作** $A-B$**，讀作** $A$ **差集** $B$**。此即** $A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$

Ex4. $A=\{2，5，x+1\}$，$B=\{-4，x-2，x^2-2x-3\}$，$A\cap B=\{2，5\}$，**則** $x=$**？** $Ans$**：**4

4.**宇集：所討論對象的全體所成的集合稱為宇集(或基集)，通常以** $U$ **表之**

5.**補集：若** $U$ **為宇集，**$A$ **為一集合，則** $U$ **中所有不在** $A$ **中的元素所成集合，**
**稱為** $A$ **的補集(或餘集)，記作** $A'$**。此即** $A'=\{x|x\notin A\}=U-A$

Ex5. **若** $A\subset B$**，則下列哪些成立？**$(A)A\cup B=B(B)A\cap B=A(C)A'\subset B'(D)B'\subset A'Ans$**：**$ABD$

6.**常用性質：**

| | |
|---|---|
| $A\cup B=B\cup A$ | (**交換**) |
| $A\cap B=B\cap A$ | (**交換**) |
| $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ | (**結合**) |
| $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ | (**結合**) |
| $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ | (**分配**) |
| $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ | (**分配**) |
| $(A\cap B)'=A'\cup B'$ | (**棣莫根**) |
| $(A\cup B)'=A'\cap B'$ | (**棣莫根**) |
| $(A')'=A$ | |

**三、集合的元素個數：**

1.**有限與無限：**$A$ **為一集合，**
**若** $A$ **的元素可數盡，則稱** $A$ **為有限集合**
**若** $A$ **的元素不可數或數不盡，則稱** $A$ **為無限集合**

2.**有限集合** $A$ **的元素個數記作** $n(A)$
**彬註：集合的元素個數以互異考慮**

Ex6. **設** $S\subset R$**，且滿足：**(1)$2\notin S$，$3\in S$，(2)**若** $a\in S$**，則** $\frac{a-3}{a-2}\in S$**。**

**下列何者正確？**$(A)-1\in S(B)0\in S(C)\frac{1}{2}\in S(D)\frac{3}{2}\in S(E)n(S)\geqq 3Ans$**：**$BDE$

3.**有限集合的元素個數性質：**

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$n(2^A)=2^{n(A)}$

Ex7. **三位正整數中，是** 2 **或** 3 **的倍數者有？個** $Ans$**：**600

Ex8. 1 到 120 的自然數中，是 2 或 3 或 5 的倍數者有？個 *Ans*：88

Ex9. 若 $M=\{x\in N \mid 1\leq x\leq 1000\}$，則 $M$ 中與 30 互質的有個 *Ans*：266

Ex10. 1 到 1000000 的自然數中，(1)是完全平方數或立方數者有幾個？(2)非平方數，也非立方數者有幾個？(3)是平方數，但不是立方數者有幾個？
*Ans*：1090；998910；990

---

Ex11. $x\in R$, $A=\{x \mid |x|>1\}$、$B=\{x|x>1\}$、$C=\{x|x^2>1\}$、$D=\{x|x^3>1\}$
則(1)$A\subset B$(2)$B\subset C$(3)$C\subset D$(4)$D\subset A$(5)$A\subset C$(6)$B\subset D$ *Ans*：2456

Ex12. 下列哪些正確？(*A*)$0\subset\{0\}$(*B*)$0\subset\varnothing$(*C*)$0\in\varnothing$(*D*)$0\in\{0\}$(*E*)$\varnothing\subset\{0\}$ *Ans*：*DE*

Ex13. 若 $A=\{1，2，3，\{1，2\}\}$，$B=\{1，2\}$則下列何者為真？
(1)$1\in A$(2)$1\in B$(3)$B\in A$(4)$B\subset A$(5)$\{B\}\subset A$(6)$\{3\}\subset A$(7)$\{1，\{1，2\}\}\subset A$
*Ans*：1234567

Ex14. 設 $A=\{x|a\leqq x\leqq 1\}$，$B=\{x|-1\leqq x\leqq 0\}$
(1)若 $A-B=\{x|0<x\leqq 1\}$，則 $a$ 的範圍為？*Ans*：$-1\leqq a\leqq 0$
(2)若 $A-B=A$，則 $a$ 的範圍為？*Ans*：$0<a\leqq 1$
(3)若 $A-B$ 中的元素共有 4 個整數，則 $a$ 的範圍為？*Ans*：$-5<a\leqq -4$

Ex15. 設 $A\subset B$，下列哪個必是空集合？(*A*)$A\cap B'$(*B*)$A'\cap B$(*C*)$A'\cap B'$(*D*)$A\cap B$ *Ans*：*A*

Ex16. 市場調查 200 戶住家發現：有訂閱甲報的 57 戶，有訂閱乙報的 68 戶，有訂閱丙報的 78 戶，恰訂閱其中兩種的有 53 戶，而此三種報紙都訂閱的有 10 戶，試問三種報紙都不訂閱的有幾戶？*Ans*：70

Ex17. 52 個學生參加數學測驗，測驗題分 *A*，*B*，*C* 三題，結果答對 *A* 題者有 37 人，答對 *B* 題者有 30 人，答對 *C* 題者有 25 人，同時答對 *A*，*B* 者有 20 人，同時答對 *B*，*C* 者有 13 人，同時答對 *C*，*A* 者有 16 人，三題均答對者有 5 人，則(1)*A*，*B*，*C* 三題中至少答對一題者有幾人？(2)三題均答錯者有幾人？(3)恰答對一題者有幾人？(4)至少答對二題者有幾人？*Ans*：48；4；9；39

## 1-2 邏輯的基本概念

**一、敘述與命題：**

1.敘述：凡可明確地判斷為「真」或「假」的語句稱為敘述

2.否定敘述：將一敘述「$p$」否定後可得一新敘述，稱為否定敘述，記作「$\sim p$」

由 $p$ 是正確的可推出$\sim p$ 是錯誤的；由 $p$ 是錯誤的可推出$\sim p$ 是正確的

彬註：否定：且 *vs.*或、所有 *vs.*有些、每一 *vs.*至少有一

3.將「若 $p$ 則 $q$」之形式的敘述稱為命題，記作「$p\to q$」；

其中 $p$，$q$ 為兩敘述，且稱 $p$ 為前提(假設)，$q$ 為結論

4.命題的真假判斷：

命題為「對」有二種可能：

結論「真」或前提「假」

命題為「錯」有一種可能：

前提「真」且結論「假」時，

例：考試得分有二種可能：學生答對或題目出錯，

考試沒得分只有一種可能：當題目對且學生答錯

| $p$ | $q$ | $p\to q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | × | × |
| × | 0 | 0 |
| × | × | 0 |

Ex18. 下列何者為敘述？$(A)x+1=x-5$ $(B)x+1=-5$ $(C)3+7<5-10$ $(D)$彬哥非常帥

$(E)$三角形不是四邊形。*Ans*：*ACE*

Ex19. 下列命題何者為真？$(A)\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{CA}$ 且 $\overline{AB}-\overline{CA}<\overline{BC}$

$(B)\triangle ABC$ 中，兩邊中點連線段平行第三邊且等於第三邊長的一半

$(C)$平行四邊形一組對邊平行且相等

$(D)$梯形一組對邊平行且相等

$(E)$梯形對角線互相垂直且平分 *Ans*：*ABC*

Ex20. 寫出下列各命題的否定命題：

(1)陳水扁是台南人。*Ans*：陳水扁不是台南人

(2)小李的月考數學和英文均及格。*Ans*：小李的月考數學或英文不及格

(3)小李的月考數學及格或英文及格。*Ans*：小李的月考數學和英文均不及格

(4)一年二班同學中有人騎腳踏車上學。*Ans*：一年二班同學沒人騎腳踏車上學

(5)一年十七班全班同學都沒有說謊。*Ans*：一年十七班有些同學說謊

(6)$\triangle ABC$ 中，有一內角為鈍角。*Ans*：$\triangle ABC$ 的三內角均非鈍角

(7)$\forall x\in R$，$x>3$。*Ans*：$\exists x\in R$，$\ni x\leqq 3$

(8)$\exists x\in Q$，$\ni x\leqq 3$。*Ans*：$\forall x\in Q$，$\ni x>3$

5.給定一命題「$p\to q$」，可衍生出以下三命題：

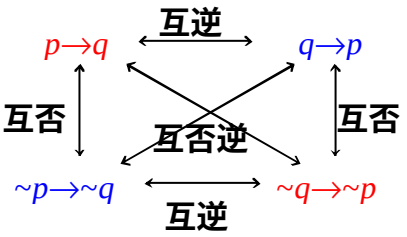
逆命題：即命題「$q\to p$」

否命題：即命題「$\sim p\to\sim q$」

否逆命題：即命題「$\sim q\to\sim p$」

6.命題等價：互否逆之命題等價(用真值表證)

即「$p\to q$」≡「$\sim q\to\sim p$」



Ex21. 寫出命題「用功讀書的學生必有獲得知識」的否命題，逆命題，否逆命題

*Ans*：不用功的學生沒有獲得知識；有獲得知識的學生必定用功讀書；沒獲得知識的學生必定不用功讀書

Ex22. 下列推論何者為真？

(*A*)已知「天下雨⇒地面潮濕」，則「天不下雨⇒地面不潮濕」

(*B*)已知「某人家裡有電視機⇒某人不是窮人」且「某人是窮人⇒某人不必納稅」。已知某人家裡沒有電視機，可以推得某人不必納稅。

(*C*)若「好青年不抽煙」為真，則「某人不抽煙⇒某人是好青年」

*Ans*：全偽

Ex23. 以下命題皆為真：「若 $A$ 為綠色則 $B$ 為紅色」、「若 $A$ 非綠色則 $B$ 為白色」、「若 $B$ 為紅色則 $C$ 為藍色」、「若 $C$ 非黑色則 $B$ 為黃色」、「若 $C$ 為藍色則 $D$ 非白色」；已知 $D$ 為白色，試問 $B$、$C$ 之顏色 *Ans*：$B$ 為白色，$C$ 為黑色

7.邏輯「且」「$\wedge$」：只有 $pq$ 同時為「真」時，「$p\wedge q$」才「真」

8.邏輯「或」「$\vee$」：只要 $pq$ 不同時為「假」時，「$p\vee q$」就「真」

9.真值表(窮舉)：

「$p\to q$」

≡「$\sim q\to\sim p$」

≡「$\sim p\vee q$」

| $p$ | $q$ | $p\wedge q$ | $p\vee q$ | $p\to q$ | $\sim q\to\sim p$ | $\sim p\vee q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| o | o | o | o | o | o | o |
| o | × | × | o | × | × | × |
| × | o | × | o | o | o | o |
| × | × | × | × | o | o | o |

10.邏輯的棣莫根：$\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p)\vee(\sim q)$，$\sim(p\vee q)\equiv(\sim p)\wedge(\sim q)$

二、條件

1.充分條件：若命題「$p\to q$」為真，則用符號「$p \Rightarrow q$」表示，讀作 $p$ 蘊涵 $q$ (即由敘述 $p$ 可推得敘述 $q$)。$p$ 稱為 $q$ 的<u>充分條件</u>

2.必要條件：同上，$q$ 亦稱為 $p$ 的<u>必要條件</u>

3.充要(充分必要)條件：若命題「$p\to q$」「$q\to p$」均為真，則用符號「$p\Leftrightarrow q$」表示，讀作<u>若且唯若</u> $p$ 則 $q$。(即由敘述 $p$ 可推得敘述 $q$，而由敘述 $q$ 亦可推得敘述 $p$)

此時 $p$ 稱為 $q$ 的充要條件，$q$ 亦稱為 $p$ 的充要條件

Ex24. 判斷下列為充分、必要或充要條件：

$\triangle ABC$ 中，$\angle A>90^o$ 是 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形的何種條件？*Ans*：充分

$\triangle ABC$ 中，$\angle A<90^o$ 是 $\triangle ABC$ 為銳角三角形的何種條件？*Ans*：必要

$a>0$，$b<0$ 為 $ab<0$ 的何種條件？*Ans*：充分

$a,b\in R$，$a=b=0$ 是 $a^2+b^2=0$ 的何種條件？*Ans*：充要

$a,b\in R$，$a+b>0$ 且 $ab>0$ 為 $a>0$ 且 $b>0$ 的何種條件？*Ans*：充要

$-1<x<3$ 為 $x^2-2x-3<0$ 之何種條件？*Ans*：充要

$x\leqq 0$ 為 $(x+1)(x+2)<0$ 之何種條件？*Ans*：必要

Ex25. 若 $p$ 為 $q$ 的充分條件，$q$ 為 $r$ 的充要條件，$r$ 為 $s$ 的充要條件，$s$ 為 $q$ 的必要條件，則(1)$p$ 為 $s$ 的何種條件？(2)$q$ 為 $s$ 的何種條件？(3)$p$ 為 $r$ 的何種條件？

*Ans*：充分；充要；充分

**三、常見證明方法：**

1.直接證法：蘊涵關係具有遞移性，即 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow r$ 可得 $p\Rightarrow r$

利用此一性質，若欲證明「$p\Rightarrow q$」

可證明 $p\Rightarrow p_1$、$p_1\Rightarrow p_2$、……、$p_{n-1}\Rightarrow p_n$、$p_n\Rightarrow q$ 即可

2.歸謬證法：利用命題與否逆命題等價，若欲證明 $p\Rightarrow q$，可證明$\sim q\Rightarrow\sim p$

3.窮舉證法：考慮所有可能情形(例：真值表)

4.鴿籠原理：10 隻鴿子進入 9 個籠子$\Rightarrow$至少有 1 籠子有 2 隻以上(含)的鴿子

5.常用符號：$\forall$：對所有的。$\exists$：存在。$\exists!$：存在唯一。$\ni$：使得

Ex26. $x$，$y$，$z\in R$，命題「若 $x+y+z=9$，則 $x^3+y^3+z^3\neq 3xyz$」為偽，則 $x-y+z=$？

*Ans*：3

Ex27. 已知「若 $x+y=5$ 則 $2x-y\neq 1$」為偽，求 $x$、$y$ 之值 *ans*：$x=2$，$y=3$

Ex28. 設 $a$，$b$，$c$ 都是奇整數，試證：方程式 $ax^2+bx+c=0$ 沒有“整數解”

---

Ex29. 試證：$a^3+b^3+c^3=3abc\Leftrightarrow a+b+c=0$ 或 $a=b=c$

Ex30. 試證：若 $n\in Z$，$n^2$ 為 3 的倍數，則 $n$ 為 3 的倍數

Ex31. 試證：若 $a$，$b$，$c\in Z$，且 $a^2+b^2=c^2$ 則三者最少有一為偶數

Ex32. 試證：若 10 人數學總分為 700 分，則至少有一人的分數不小於 70 分

Ex33. 試證：若 $m$，$n\in Z$，$mn$ 為偶數，則 $m$ 是偶數或 $n$ 是偶數

Ex34. 在邊長 1 的正方形內任意放置 5 個點，試證：至少有兩點的距離不大於 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ex35. 在 19 個密閉的盒子中，每個盒子都裝了乒乓球，每盒最多裝 6 個，試證：至少有 4 個盒子裝的乒乓球數一樣多

## 1-3 函數的基本概念

**一、函數的意義：**

1.**定義域、對應域、值域：**

$f$：$A\to B$ **中，**

**集合** $A$ **稱為函數** $f$ **的定義域，**

**集合** $B$ **稱為函數** $f$ **的對應域，**

**所有函數值** $f(a)$**所成的集合稱為** $f$ **的值域，以** $f(A)$**表示。**

**其中** $f(A)\subset B$

Ex36. **求下列函數的定義域**(1)$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$ (2)$f(x)=\sqrt{|x|}$ (3)$f(x)=\sqrt{x+4}+\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$

*Ans*:(1)$\{x|x>2\}$(2)$\{x|x\in R\}$(3)$\{x|-4\le x<5\}$

Ex37. **求下列函數的值域**(1)$f(x)=x+2$，$-1\leqq x\leqq 1$，(2)$f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$，$x\neq 2$

(3)$f(x)=\dfrac{|x|-\sqrt{x^2}}{3}$ *Ans*:$\{f(x)|1\le f(x)\le 3\}$；$\{1，-1\}$；$\{0\}$

Ex38. **設** $f(x)$**滿足** $f(x-1)=4x+3$，**則** $f(x)=$？*Ans*：$4x+7$

Ex39. **設** $f(x)$**滿足** $f(x-1)=4x^2-7x+1$，**則** $f(x)=$？*Ans*：$4x^2+x-2$

2.**函數的圖形：**

**若** $A$，$B\subset R$，$f$：$A\to B$ **為一函數，將所有點**$(x，f(x))$，$x\in A$，

**描繪於平面直角坐標系中，所形成的圖形稱為函數** $f$ **的圖形**

**此圖形即平面直角坐標系中的一個點集合** $G=\{(x，f(x))|x\in A\}$

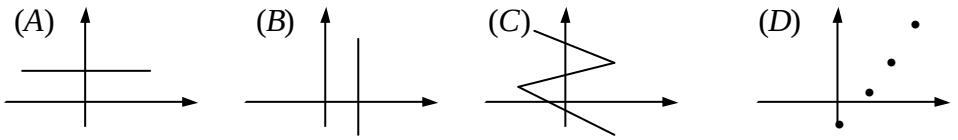
3.**函數圖形的特徵：經過函數** $y=f(x)$**定義域中的任一點** $x$，

**作垂直於** $x$ **軸的直線** $L$，**則** $L$ **與函數圖形恰交於一點**$(x，f(x))$

Ex40. **下列關係式中，「**$y$ **是** $x$ **的函數」有哪些？**

$(A)x=3$ $(B)y=2$ $(C)xy=1$ $(D)y^2+3x-2=0$ $(E)x^2=3x-y$ *Ans*:*BCE*

Ex41. **下列那些圖形可為函數圖形：** *Ans*:*AD*




4.**遞增函數：函數圖形如果由左至右逐漸升高，則稱此函數為遞增函數；**

**若** $a>b$，**則** $f(a)\geqq f(b)$ (**無等號稱絕對遞增**)

5.**遞減函數：函數圖形如果由左至右逐漸下降，則稱此函數為遞減函數；**

**若** $a>b$，**則** $f(a)\leqq f(b)$ (**無等號稱絕對遞減**)

6.**偶函數：若函數** $f$ **滿足** $f(-x)=f(x)$，**則稱** $f$ **為偶函數。例：**$f(x)=x^2$

**函數圖形左右對稱於** $y$ **軸**

7.**奇函數：若函數** $f$ **滿足** $f(-x)=-f(x)$，**則稱** $f$ **為奇函數。例：**$f(x)=x^3$

**函數圖形對稱於原點**

8.**週期函數：若函數** $f$ **滿足** $f(x+T)=f(x)$**，則稱** $f$ **為週期函數。**
**最小正數** $T$ **稱為週期**

Ex42. **若函數** $f(x)$**表** $2^x$ **之個位數字，如** $f(3)=8$，$f(4)=6$；
**求** $f(1)+f(2)+\ldots+f(101)$**之值。** *Ans*:502

**二、函數的合成：**
**設兩函數** $f$：$A\to B$，$g$：$B\to C$，**稱** $g\circ f$：$A\to C$ **為** $f$ **與** $g$ **的合成函數，即** $g\circ f(x)=g(f(x))$

Ex43. **設** $f(x)=x^2+1$，$g(x)=x-1$，**則**(1)$f\circ g(x)=$ **？**(2)$g\circ f(x)=$ **？**(3)$f\circ f(x)=$ **？**
*Ans*：$x^2-2x+2$；$x^2$；$x^4+2x^2+2$

**三、函數的對映關係：**
1.**嵌射**(1–1 **函數**)：**設** $f$：$A\to B$ **為一函數，對** $A$ **中任二元素** $x_1$，$x_2$，
**若** $x_1\neq x_2$ **時恆有** $f(x_1)\neq f(x_2)$**，則稱** $f$ **為一對一函數**
2.**蓋射**(**映成函數**)：**設** $f$：$A\to B$ **為一函數，若** $f(A)=B$**，則稱** $f$ **為映成函數**
3.**對射：**1–1 **且映成**

Ex44. **若** $A=\{x，y，z\}$，$B=\{1，3，5，7\}$，**則由** $A$ **映至** $B$ **的函數共有幾種？** *Ans*:64

Ex45. **設函數** $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,-1\le x\le 1 \\ [x] & ,1\le x<3 \end{cases}$，**其中**$[x]$**表高斯函數，且** $f(x+4)=f(x)$，**則**
(1)$f(11)=$ **？**(2)$f(-7)=$ **？**(3) $f(\frac{29}{3})=$ **？** *Ans*：1；1；1

Ex46. **求下列函數的定義域、值域**(1)$f(x)=\sqrt{5-4x-x^2}$ (2)$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$
*Ans*:(1)$A=\{x|-5\le x\le 1\}$，$f(A)=\{y|0\le y\le 3\}$；(2)$A=\{x|0<x<4\}$，$f(A)=\{y|y\ge \frac{1}{2}\}$

Ex47. **求下列函數的值域：**
(1)$f(x)=2$，$x\in R$，*Ans*：$\{2\}$
(2)$f(x)=2x+1$，$-1\le x<2$，*Ans*：$\{x|-1\le x<5\}$
(3) $f(x)=2x^2-4x+1$，$x\in R$，*Ans*：$\{x|x\geqq -1\}$
(4) $f(x)=2x^2-4x+1$，$-1\le x\le 2$，*Ans*：$\{x|-1\le x\le 7\}$
(5) $f(x)=\frac{1}{x}, -1\le x\le 1, x\neq 0$，*Ans*：$\{x|x\geqq 1\vee x\le -1\}$

Ex48. **若** $f(x)=\begin{cases} 2 & x>2 \\ x^2 & 0<x\le 2 \\ x+2 & x\le 0 \end{cases}$，**求** $f(f(0))+f(f(2))$**與** $f(x)$**的最大值。** *Ans*:6；4

Ex49. **若** $f(x)=4x-5$，$g(x)=3x+1$ **且** $f(k)=g(2)$，**試求** $k$ **？** *Ans*：3

Ex50. 設 $f(\frac{x-1}{2x-1})=3x+2$，則 $f(1)=$？$Ans$：2

Ex51. 函數 $f(\frac{x+1}{x-1})=\frac{3x-1}{2x+3}$， $x\neq 1$， $x\neq -\frac{3}{2}$，求 $f(x)=$？$Ans$： $\frac{2x+4}{5x-1}$， $x\neq\frac{1}{5}$

Ex52. 設 $f(n)$表“ $\frac{1}{7}$化成小數，小數點後第 $n$ 位數字”，則

(1)$f(1)=$？$f(2)=$？$f(1999)=$？$Ans$：1，4，1

(2)設 $n$ 是任意正整數，$f(n)$是否為 $n$ 的函數？$Ans$：是

(3)寫出 $f$ 的值域 $Ans$：{1，2，4，5，7，8}

Ex53. 設 $f(x)$為一函數，滿足 $f(x+3)=f(x)$，$f(-x)=-f(x)$

已知 $f(1)=3$，則(1)$f(7)=$？(2)$f(-22)=$？$Ans$：3；-3