2-1 整數

一、整數的性質：

1.**封閉性：＋－×**

2.**離散性：**$\forall a$，$b\in Z$，$a\neq b$，**則**$|a-b|\geqq 1$

3.**除法原理：**a、$b\in Z$，$b\neq 0$，$a=bq+r$，**其中** $0\leq r<|b|$

二、因數與倍數：設 a、b、$c\in Z$

1.**零不為任意非零數之因數**

2.**零為任意非零整數之倍數**

3.$a|b$，$b|c\Rightarrow a|c$ (**遞移性**)

4.$a|b$，$a|c\Rightarrow a|mb\pm nc$，**其中** m、$n\in Z$ (**倍數加減乘倍數仍為倍數**)

Ex1. **設** m，$n\in N$，$m>1$，**若** $m|(35n+28)$**且** $m|(5n+3)$，**則** m **之值＝？** Ans：7

Ex2. **設** $n\in N$，**且** $\frac{5n+12}{2n-3}\in N$，**求** n **值？** Ans：2，3，8，21

三、質數

1.**質數：正因數恰只有二個**(1 **與本身**)**之自然數稱之**

2.**最小之質數為** 2

3.**質數檢驗定理：**$a\in N$，$a>1$，**若** a **沒有小於或等於** $\sqrt{a}$ **的質因數，則** a **為質數**

4.**質數** 2、3、5、7、11...**的倍數判斷**

5.**質數無限多個**

Ex3. **若六位數** $12a49b$ **為** 36 **的倍數，求數對**$(a，b)$**？** Ans：(0，2),(9，2),(5，6)

Ex4. $n\in N$ **且** $p=n^4-6n^2+25$ **為質數，求** n，p **之值？** Ans：2，17

四、標準分解式

$$a=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$$

1.**正因數的個數** $n=(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$

2.**正因數的總和** $S=(\sum_{t=0}^{a_1}p_1^t)(\sum_{t=0}^{a_2}p_2^t)\cdots(\sum_{t=0}^{a_k}p_k^t)$

3.**正因數的乘積**$=a^{\frac{n}{2}}$

4.**正因數的倒數和**$=\frac{S}{a}$

5.**因數的個數**$=2n$

6.**因數的總和**$=0$

Ex5. **試求** 57600 **的**

(1)**正因數的個數及總和**(2)**因數的個數及總和**(3)**正因數的乘積及倒數和**

(4)**正因數中，完全平方數的個數及總和**

(5)**正因數中，是** 9 **之倍數，但不是** 8 **之倍數者的個數及總和**

Ans：81，205933；162，0；240^{81}，$\frac{205933}{57600}$；20，88660；9，1953

Ex6. 將 333333 的所有正因數，由大而小排列，$a_1>a_2>a_3>a_4>\cdots\cdots$，求 a_4=?

Ans：37037

五、最大公因數(*g.c.d.*)**與最小公倍數**(*l.c.m.*)　　(**註：均正**)

1.**設** a，$b\in Z$，$ab\neq 0$，**則**$(a，b)\cdot[a，b]=|ab|$

2.**設** a，b，$c\in Z$，$abc\neq 0$，**則**

(1)$(a，b，c)\cdot[a，b，c]=|abc|$**不一定成立**

(2)**若**$(a，b)=(b，c)=(c，a)=1$，**則**$(a，b，c)\cdot[a，b，c]=|abc|$

3.**若** a，b，$c\in Z$，$a|bc$ **且**$(a，c)=1\Rightarrow a|b$

4.**設** p **為質數且** $p|ab\Rightarrow p|a$ **或** $p|b$

5.**若** a、$b\in Z$，$(a，b)=1\Rightarrow(ab，a+b)=1$，$(ab，a-b)=1$

Ex7. a，$b\in N$，$a+2b=126$，$[a，b]=140$，**則數對**$(a，b)=$？*Ans*：(70，28)

Ex8. a、$b\in N$，**若** $ab=77760$ **且**$[a，b]=1080$，**那麼** a **與** b **的正公因數有多少個？**

Ans：12

Ex9. $a\in N$，**若** 281 **除以** a **餘數為** 17，881 **除以** a **餘數為** 23，**求可能** a **值之和？**

Ans：99

六、同餘≡

1.(mod 7)1≡8≡15≡22

2.a≡b，c≡d⇒a(+-×÷)c≡b(+-×÷)d

七、輾轉相除法

1.**直式**

2.**橫式**

13÷8=1…5	13=8×1+5
8÷5=1…3	8=5×1+3
5÷3=1…2	5=3×1+2
3÷2=1…1	3=2×1+1
2÷1=2…0	2=1×2+0

1	13	8	1
	8	5	
1	5	3	1
	3	2	
2	2	1	
	2		
	0		

Ex10. **設** $a\in N$，**若** $2+\dfrac{1}{6+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{5}}}=\dfrac{803}{371}$，**則** $a=$？*Ans*：12

3.**設** a、$b\in Z$，$b\neq 0$，**若** $a=bq+r$，**其中** $0\leq r<|b|\Rightarrow(a，b)=(b，r)$

4.**設** a、$b\in N$，$(a，b)=d\Rightarrow\exists m$、$n\in Z$，**使得** $d=ma+nb$

Ex11. **若正整數** a，b，q，r **滿足** $a=bq+r$，**且令**$(a，b)$**表示** a **與** b **的最大公因數，**

則下列何者為真?$(A)(a，b)=(b，r)(B)(a，b)=(q，r)(C)(a，q)=(b，r)$

$(D)(a，q)=(q，r)(E)(a，r)=(b，q)$*Ans*：*AD*

Ex12. 設 a，b，x，y，z 皆為正整數，且滿足 $\begin{cases} a = bx + 4098 \\ b = 4098y + 582 \\ 4098 = 582z + 24 \end{cases}$，求$(a，b)$ Ans：6

八、整數解：例：求 $13x+8y=1$ 之整數解

通解為 $\begin{cases} x = -3 + 8t \\ y = 5 - 13t \end{cases}, t \in Z$，表示法並不唯一，

$x=-3$，$y=5$ 為一組解(代入滿足方程式)

$x=8t$，$y=-13t$ 為零解(代入=0)(係數顛倒變號之互質比例)

1.輾轉相除法：(擴充型)

例：$91x+56y=(91，56)$

如右表，一組解為 $x=-3$，$y=5$

1	91	a	56	b	1
	56	b	35	$a-b$	
1	35	$a-b$	21	$-a+2b$	1
	21	$-a+2b$	14	$2a-3b$	
2	14	$2a-3b$	7	$-3a+5b$	
	14	$-6a+10$			

2.求一術：例：$13x+8y=1$

第一列為商數(輾轉相除法)

第二列最左邊固定為 1

第三列最左邊固定為 0 與 1

餘格=上方商數×左格+左左格

	1	1	1	1	2
1	1	2	3	5	13
0	1	1	2	3	8

	1	1	1	1	2
+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+

最右欄的餘格分別為 x，y 之係數(可作為驗算用)(零解)

次右欄的 5，3 搭配右方正負號即為一組解($y=5$，$x=-3$)

3.尤拉解法：(1)留小係數(2)假分數換帶分數(3)求一組解(或再一次)

例：$13x+8y=7$

$8y=7-13x$

$$y = \frac{7-13x}{8} = 1 - 2x + \frac{-1+3x}{8}$$

令 $\frac{-1+3x}{8}=1$ 得一組解 $x=3$，$y=-4$

4.剩餘定理：

例：今有物，不知其數。三三數之剩一，五五數之剩二，七七數之剩三。問物幾何？答曰：五十二

三人同行七十稀

五樹梅花廿一枝

七子團圓月正半

除百零五便得知。

(70+42+45)÷105.....52

÷3...1	35	70	105				
÷5...2	21	42	63	84	105		
÷7...3	15	30	45	60	75	90	105

Ex13. 求滿足下列條件之最小自然數 n 值

(1)n 除以 7，5 均餘 2

(2)n 除以 7，5 各餘 5，3

(3)n 除以 7，5 各餘 5，2

(4)n 除以 7，6，5 各餘 5，1，2

Ans：2，33，12，187

Ex14. 求 $xy-3x+4y=5$ 的整數解？*Ans*：(-3，-4),(-5，10),(3，2),(-11，4)

Ex15. 設 x，$y\in Z$，則 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=1$ 有幾組解？*Ans*：7

Ex16. 設 a，b 為正整數，a 除以 18 的餘數為 7，b 除以 12 的餘數為 10，則 a^2+ab 除以 6 的餘數為？*Ans*：5

Ex17. 設 $a\in N$ 且 $\frac{3a+40}{a+1}\in N$，求 a 值？*Ans*：36

Ex18. 已知『偶數的平方是 4 的倍數；奇數的平方除以 4 餘數為 1』。考慮五個數：513，226，216，154，145。試問下列何者可以和上述五數中的某一數相加成為完全平方數：(*A*)513(*B*)226(*C*)216(*D*)154(*E*)145 *Ans*：*ACE*

Ex19. 下列哪些數是 9 的倍數?(*A*)247023846(*B*)645×7329(*C*)3^{101}(*D*)986^3+814^3(*E*)$10^{90}+1$ *Ans*：*ABCD*

Ex20. 設 $n\in N$，且 $\sqrt{n^2-9n-1}=k\in N$，求數對$(n，k)$？*Ans*：(26，21)，(10，3)

Ex21. 若 a，b 均為整數且方程式 $x^2-ax+817=0$ 與 $x^2-bx+3553=0$ 有共同的質數根，則數對$(a，b)$＝? *Ans*：(62，206)

Ex22. 自然數 7200 的正因數中為 12 的倍數而非 60 的倍數者有多少個？*Ans*：8

Ex23. $2^7\times3^4\times5^3$ 的正因數中，被 45 整除，不被 8 整除者共多少個？*Ans*：27

Ex24. 設 x，$y\in N$ 且 $xy=3600$，求

(1)正整數解$(x，y)$共有？組

(2)正偶數解有？組

(3)x，y 互質之$(x，y)$共有？組

(4)x，y 為完全平方者有？組 *Ans*：45，27，8，12

Ex25. $a\in N$，$a\geq 1000$，且 a 被 465 除後餘數為 30，求$(a$，465)？*Ans*：15

Ex26. $x\in N$，$x\neq 1$，以 x 除 215，425，7195 之餘數均相同，求 x 值？*Ans*：2,5,10

Ex27. 有一軍團，人數在三千與四千之間，今將此軍團排成若干個同樣的方陣，發現以 8×8 方陣排之，或以 12×12 方陣排之，都恰好排盡，求軍團人數？
Ans：3456

Ex28. 公元 2000 年的 1 月 1 日是星期六。試問下一個 1 月 1 日也是星期六，在公元何年？*Ans*：2005

Ex29. 天干地支記日是分別以甲子、乙丑、丙寅、丁卯、戊辰、己巳、庚午、辛未、壬申、癸酉、甲戌、乙亥、丙子、丁丑、…癸亥、六十天為一週期循環記日。已知民國 89 年 7 月 3 日為壬戌日，那麼推算民國 90 年 1 月 1 日以天干地支記是？日 *Ans*：甲子

Ex30. 已知民國八十八年為己卯年，試求民國 160 年的農曆記年？*Ans*：辛卯

Ex31. 兩個正整數的最大公因數 36，其和為 504，且兩數都大於 150，則此兩數為？
Ans：180，324

Ex32. 若 $\frac{n}{6}$，$\frac{n^2}{196}$，$\frac{n^3}{441}$ 皆為正整數，則正整數 n 的最小值為？*Ans*：42

Ex33. 設 $n\in N$，且 n^4-3n^2+9 是質數，則 $n=$？*Ans*：1 或 2

Ex34. a 是整數，則滿足 $a^3|2^7\times 3^4\times 5^3$ 的 a 共？個 *Ans*：24

Ex35. $(2993)^{74687}$ 的值除以 10 所得餘數為？*Ans*：7

Ex36. 已知 9 除 x 餘數為 5，9 除 y 餘數為 4，則 9 除 $1999x^2y^3$ 的餘數為？*Ans*：7

2-2 有理數與實數

一、有理數 Q：

$Q=\{x|x=\frac{q}{p}$，$p\neq 0$，p、$q\in Z$，$(p，q)=1\}$，

如：整數、分數、有限小數、循環小數

彬註 1：$(I\text{-}3\text{-}2)$**循環小數化分數：** $ab.c\overline{def}=\frac{abcdef-abc}{9990}$

彬註 2：無理數 Q'表成小數時，為不循環之無限小數$(Q'=R-Q)$

Ex37. **把循環小數** $8.15\overline{374}$**化為最簡分數** Ans**：** $\frac{814559}{99900}$

Ex38. **已知：設** $n\in N$**，若** n^2 **為** 3 **的倍數，則** n **為** 3 **的倍數。試證：**

(1) $\sqrt{3}$ **為無理數**(2) $5+\sqrt{3}$ **為無理數**(3) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ **為無理數**

1.**有理數的稠密性：任意二相異的有理數之間，至少有一個有理數存在**

2.**設** a、b、$c\in Q$，$\sqrt{c}\in Q'$，**則** $a+b\sqrt{c}=0\Leftrightarrow a=b=0$

Ex39. **若** $\sqrt{11+\sqrt{72}}=a+b$**，其中** $a\in N$，$0<b<1$，**求** a，b**？**Ans**：**4，$\sqrt{2}-1$

Ex40. x，$y\in Q$，**且** $x+y\sqrt{16+\sqrt{252}}=x\sqrt{8-\sqrt{28}}+5$，**求數對**$(x，y)$ Ans**：**(1，1)

Ex41. **設** $m\in Z$，**且** $x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}m-4=0$ **有有理根，求** m **之值** Ans**：**4 **或**-1

二、實數 R

1.**數線上之所有點代表之數所成之集合，稱為實數**

2.**封閉性**$(R$**：**$+-\times\div)(Q$**：**$+-\times\div)(Q$ **沒有**$)(Z$**：**$+-\times)(N$**：**$+\times)$

3.**稠密性**$(Q$、$R)$、**離散性**$(N$、$Z)$

4.a，$b\in R$；$a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=b=0$

Ex42. **判斷下列敘述是否正確**?(A)**若** a，$b\in Q$，**則** $a+b\in Q(B)$**若** a，b **均為無理數，則** $a+b$ **亦為無理數**(C)**若** a **為有理數，**b **為無理數，則** $a+b$ **亦為無理數**(D)**設** a，$b\in Q$，x，y **為無理數，若** $a+x=b+y$，**則** $a=b$，$x=y(E)$**設** $x\in R$，$x\neq 0$，**若** $x^9\in Q$，$x^{12}\in Q$，**則** $x\in Q(F)$**設** $x\in R$，$x\neq 0$，**若** $x^7\in Q$，$x^{12}\in Q$，**則** $x\in Q$ Ans**：**ACF

三、絕對值函數

1.**幾何意義：數線上二點** a，b **的距離**$=|a-b|$

2.$a\in R^+$，$|x|\leqq a\Leftrightarrow -a\leqq x\leqq a$

3.$a\in R^+$，$|x|\geqq a\Leftrightarrow x\leqq -a$ **或** $x\geqq a$

4.$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots\cdots+|x-a_n|$ **在** $x=$**『中位數』時，**$f(x)$**有最小值**

比較：$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots\cdots+(x-a_n)^2$ **在** $x=$**？時有最小值**

5.$||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$

Ex43. a，b，$x\in R$，**若** $|ax+1|\geq b$ **之解為** $x\geq 5 or x\leq -3$，**求** a，b Ans**：**-1，4

Ex44. 設 $x\in R$，則 $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-30|$ 之最小值為？(中位數)Ans：29

Ex45. $x\in R$，求使 $|x-3|+|x+8|=k$ 有解之最小整數 k？Ans：11

Ex46. 有理數 a，b 使 $2|a+2|+3|a+2b-3|=0$，則數對$(a，b)$＝？Ans：-2，$\frac{5}{2}$

四、數線(R)：

1.**距離：點** $A(a)$**與點** $B(b)$**之距離為**$|a-b|$

2.**中點：點** $A(a)$**與點** $B(b)$**之中點為** $M(\frac{a+b}{2})$ (**算術平均**)

3.**內分點：點** $A(a)$**與點** $B(b)$**之內分點**$(\overline{PA}：\overline{PB}=m:n)$**為** $P(\frac{na+mb}{n+m})$ (**加權平均**)

4.**外分點：點** $A(a)$**與點** $B(b)$**之外分點**$(\overline{PA}：\overline{PB}=m:n)$**為** $P(\frac{na-mb}{n-m})$ (**加權平均**)

Ex47. 數線上三點 $A(2)$，$B(5)$，$P(x)$，如果 P 介於 A 與 B 間，且 $\overline{AP}：\overline{BP}=5：8$，求 x 值？Ans：$\frac{41}{13}$

Ex48. 設 a，b，$c\in N$，且 a，b，c 滿足 $\sqrt[3]{20+a\sqrt{2}}=b+c\sqrt{2}$，求 a，b，c Ans：14,2,1

Ex49. 若 x，$y\in Q$，且 $x+y\sqrt{16+\sqrt{252}}=x\sqrt{8-\sqrt{28}}+15$，求 x^2+y^2 之值 Ans：18

Ex50. 設 a，b 是有理數，且滿足$(2a-b)+(3a-\frac{b}{2})\sqrt{3}=\sqrt{3}$，則數對$(a，b)$＝？

Ans：$(\frac{1}{2}，1)$

Ex51. 設 $\sqrt{2}$ 的小數部分為 a，則 $a^2+\frac{2}{a}$ 之值？Ans：5

Ex52. 設 $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ 的整數部分為 a，純小數部分為 b，則 $\frac{1}{a-b}+b$ 之值為？Ans：3

Ex53. 正實數 a 的純小數部分為 b，已知 $a^2+b^2=38$，則 a 之整數部分？Ans：6

Ex54. 設正實數 a 的純小數部分為 b，已知 $a+b^2=n$，$n\in N$，求 b 之值？Ans：$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Ex55. x，$y\in R$，若$(x+y-10)^2+(x-10y)^2=0$，則數對$(x，y)=$？Ans：$(\frac{100}{11},\frac{10}{11})$

Ex56. $\sqrt{58.07}$化為小數時，小數點後第一位數是？Ans：6

Ex57. 寫出滿足$|x+3|\leq\frac{5}{2}$的所有整數？Ans：-1，-2，-3，-4，-5

Ex58. 寫出$\frac{p}{3}$與$\frac{p}{2}$之間的三個無理數(p 表圓周率)Ans：$\frac{9p}{24}$，$\frac{10p}{24}$，$\frac{11p}{24}$

Ex59. 設方程式 $x^2-2x-4=0$ 的兩根為 α、β，則$|\alpha|+|\beta|$之值＝？Ans：$2\sqrt{5}$

Ex60. 設 $a+b$，$b+c$，$c+a$ 為有理數，試證 a，b，c 為有理數

Ex61. 已知$\sqrt{2}$為無理數，證明$\sqrt{2}+\sqrt[3]{7}$為無理數

Ex62. 設 $a>b>c>0$，試比較$\frac{b}{a}$，$\frac{b+c}{a+c}$，$\frac{b-c}{a-c}$，1 之大小 Ans：$1>\frac{b+c}{a+c}>\frac{b}{a}>\frac{b-c}{a-c}$

Ex63. $x\in N$ 且$\sqrt{3}$介於$\frac{x+5}{x}$與$\frac{x+6}{x+1}$之間，則 $x=$？Ans：6

Ex64. $x\in N$，$f(x)$表$\sqrt{x}$的整數部分，則 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)=$？$Ans$：625

Ex65. x，$y\in R$，$|x-3|<2$，$|y-5|<3$，則使$|xy-15|<k$ 成立之最小 k 值為？Ans：25

Ex66. a、b、$x\in R$，若$|ax+1|\leq b$之解為$-2\leqq x\leqq 5$，求 a、b 之值 Ans：$\frac{-2}{3}$，$\frac{7}{3}$

Ex67. x，$y\in R$，$|x+\frac{1}{2}|\leq\frac{3}{2}$，$|y-\frac{5}{2}|\leq\frac{1}{2}$，求下列之範圍

(1)$x-y$　　(2)xy　　(3)$\frac{x}{y}$　　(4)$xy-3x-2y+1$

Ans：$-5\leqq x-y\leqq -1$，$-6\leqq xy\leqq 3$，$-1\leqq\frac{x}{y}\leqq\frac{1}{2}$，$-5\leqq xy-3x-2y+1\leqq -1$

2-3 平面座標

一、兩點間的距離公式：

平面上兩點 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，**其距離** $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Ex68. **設點** P **到** $A(3，0)$，$B(0，1)$，$C(0，6)$**都等距，則** P **的坐標為？** *Ans*：$(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$

Ex69. **設**△ABC **的三個頂點坐標各為** $A(2，-5)$，$B(3，1)$，$C(-4，2)$，**則**∠A，∠B，∠C **的大小順序為？** *Ans*：$B>A>C$

二、中點公式：$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，**則** $\overline{AB}$ **中點** M **的坐標為** $(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

三、分點公式：$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$P\in\overleftrightarrow{AB}$，$\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$

內分點 P **的坐標為** $(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n})$

外分點 Q **的坐標為** $(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\frac{-ny_1+my_2}{m-n})$ (m，n **任擇一變號**)

Ex70. **設** $A(-4，6)$，$B(1，5)$，**且點** C **為** $\overleftrightarrow{AB}$ **上一點，若** $\overline{AC}=\frac{3}{2}\overline{BC}$，**求** C **之坐標？**

Ans：$(-1,\frac{27}{5})$，$(11,3)$

Ex71. **設** $A(4，4)$，$B(-2，2)$，**若** $P\in\overline{AB}$ **且** $\overline{AP}:\overline{PB}=2：1$，**則** P **點坐標？** *Ans*：$(0,\frac{8}{3})$

Ex72. **設**△ABC **之頂點為** $A(2，-8)$，$B(-6，-2)$，$C(6，-5)$**而且頂點** A **的分角線交** $\overline{BC}$ **於** D **點，求** D **點的坐標？** *Ans*：$(2,-4)$

Ex73. **設** $A(-3，-1)$，$B(1，3)$，$P\in\overleftrightarrow{AB}$，$P\notin\overline{AB}$，**已知** $\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$，**則點** P **坐標為？**

Ans：$(9,11)$

Ex74. **平行四邊形之三頂點為** $A(5，-4)$，$B(-3，2)$，$C(4，1)$，**求第四個頂點的坐標**

Ans：$(-4,7)$，$(12,-5)$，$(-2,-3)$

四、三角形的重心、內心：

$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$C(x_3，y_3)$，$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$

△ABC **的重心** $G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$ (**算術平均**)

△ABC **的內心** $I(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c})$ (**加權平均**)

四、直線的斜率

1.**定義：設直線** L **過兩點** $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，**則** L **的斜率為** $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

彬註：若 L **是鉛直線(即** $x_1=x_2$**)，則** L **斜率不存在**

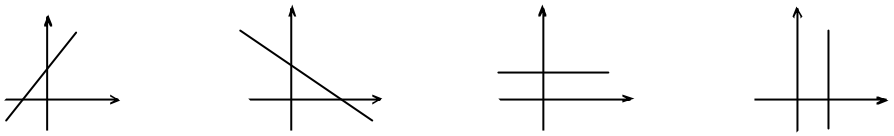
2.**直線** $ax+by+c=0$ **的斜率為** $-\dfrac{a}{b}(b\neq 0)$

（若 $b=0$**，表示直線為鉛垂線，沒有斜率）**

Ex75. **設函數** $f(x)=ax+b$**，若** x **值減少** 2 **單位，其** $f(x)$**值增加** 6 **單位，則** a **之值為**

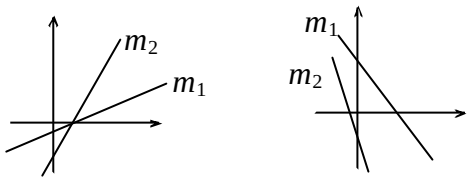
$(A)2\ (B)-2\ (C)3\ (D)-3\ (E)-\dfrac{1}{3}$ *Ans*：D

3.**斜率的正、負：**



$m>0$　　$m<0$　　$m=0$　　m ***不存在***

4.**斜率的絕對值愈大，直線愈陡**



$m_2>m_1$　　$m_2<m_1$

5.**若兩直線** L_1，L_2 **的斜率分別為** m_1，m_2

(1)$L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$

(2)$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \times m_2=-1$

6.$m=\tan\theta$　（θ**為該直線與** x **軸正向所夾有向角**）

7.A、B、C **三點共線**$\Leftrightarrow m_{AB}=m_{BC}=m_{CA}$

Ex76. **設** $A(2, -1)$，$B(5, 1)$，$C(3, a)$**為一個直角△的三頂點，則實數** a **之值為？**

Ans：$4, \dfrac{-5}{2}, \pm\sqrt{3}$

Ex77. **設** $A(4, 1)$，$B(-2, 3)$，$C(a, a-1)$**為直角三角形之三頂點，求** a **之值**

Ans：5,-5,0,4

Ex78. **若三直線** L_1：$3x-y-1=0$，L_2：$x-y+1=0$，L_3：$2x+ky+1=0$，

不能圍成一個三角形，求 k **值** *Ans*：-2，$\dfrac{-2}{3}$，$\dfrac{-3}{2}$

五、直線方程式

1.**直線方程式的表示法：**

(1)**點斜式：斜率** m，**過點**$(x_1，y_1)\Rightarrow L$：$y-y_1=m(x-x_1)$

(2)**斜截式：斜率** m，y **截距** $b\Rightarrow L$：$y=mx+b$

(3)**截距式：**x，y **截距各為** a，b，$ab\neq 0\Rightarrow L$：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

彬註：截距是指座標值(可正可負)，並非指距離(非負)

(4)**一般式：**$ax+by+c=0$

Ex79. $\triangle ABC$ **的三邊** $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ **分別在直線** $x+2y=9$，$x-y=9$，$3x-y=13$ **上，試求**$\triangle ABC$ **之**(1)**重心**(2)**垂心**(3)**外心** *Ans*：$(\frac{16}{3},\frac{-5}{3})$，(6,1)，(5,-3)

Ex80. **求過**(–2，2)**且與二坐標軸所圍成三角形面積為** 1 **的直線方程式？**

Ans：$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$，$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}=-1$

Ex81. **直線** L **過**(1，2)，**與坐標軸在第一象限所圍成之三角形面積最小，求** L **及最小面積** *Ans*：$2x+y=4$，4

Ex82. **直線** L **在兩軸上的截距差為** 3，**且與坐標軸所圍之三角形面積為** 2，**求直線方程式？***Ans*：$\frac{x}{1}+\frac{y}{4}=\pm 1$，$\frac{x}{4}+\frac{y}{1}=\pm 1$

Ex83. $\forall k\in R$，**直線** L：$(3k+5)x-(2k-1)y-(k+19)=0$ **恆過一點，則此點坐標？***Ans*：(3,4)

(5)**過** $P(x_0，y_0)$**且平行向量** $\vec{v}=(a，b)$**的直線參數式為** $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$,$t\in R$

彬註 1：**此直線的斜率為** $\frac{b}{a}$

彬註 2：**直線之參數方程式表示法不唯一**

(6)**直線參數式：**

設 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$**為相異二定點，**

(1)**直線** $\overleftrightarrow{AB}$ **的參數式為** $\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}$, $t\in R$

(2)**線段** $\overline{AB}$ **的參數式為** $\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}$, $0\le t\le 1$

(3)**射線** $\overrightarrow{AB}$ **的參數式為** $\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}$, $t\ge 0$

Ex84. $A(1，2)$，$B(2，-1)$，$P(x，y)\in\overline{AB}$，**求下列各式之最大值與最小值：**

(1)$3x-4y+6$　　(2)x^2+y^2-4 *Ans*：16，1；1，$-\frac{3}{2}$

Ex85. 若 $A(3，-50)$，$B(47，27)$，

(1) $\overline{AB}$ 上一共有多少個格子點?

(2)若 $P(x，y)\in \overleftrightarrow{AB}$ 且 $\overline{AP}$ 上有 5 個格子點，求 x 的範圍 *Ans*：12，$19\leqq x<23$

(7)直線系

設二直線 L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$、L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$ 相交於點 $P(m，n)$

則過點 P 之所有直線可表示成 $k_1(a_1x+b_1y+c_1)+k_2(a_2x+b_2y+c_2)=0$

分為下列三類：

(a)(特殊狀況)$k_1=0$：即 L_2

(b)(特殊狀況)$k_2=0$：即 L_1

$(c)k_1k_2\neq 0$；即除了 L_1、L_2 之外的所有直線。

可進一步化成 $\alpha(a_1x+b_1y+c_1)+(a_2x+b_2y+c_2)=0$ 或 $(a_1x+b_1y+c_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2)=0$

Ex86. 直線 L_1：$31x-17y+1=0$，L_2：$19x+13y-2=0$ 相交於點 A，而 B 是原點，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式為？*Ans*：$27x-7y=0$

Ex87. 設有兩直線 L_1：$7x+4y+10=0$ 與 L_2：$12x+9y+30=0$ 交於 P 點，求通過 P 點且 x 軸截距為 -4 之直線方程式？*Ans*：$x+y+4=0$

2.平行線與垂直線

(1)與 $ax+by=c$ 平行的直線可設為 $ax+by=k$，$(k\neq c)$

(2)與 $ax+by=c$ 垂直的直線可設為 $bx-ay=k$

彬註：係數顛倒變號

Ex88. 平行於直線 $3x-4y-5=0$，且與兩軸所截出的線段長為 5 之直線方程式為何？*Ans*：$3x-4y=\pm 12$

Ex89. 已知 $A(3，4)$，$B(-2，1)$，則直線 AB 的方程式為？過 $C(4，2)$與直線 AB 垂直的直線方程式為？*Ans*：$3x-5y+11=0$，$5x+3y=26$

六、距離、投影、對稱及其應用

1.點 $P_0(x_0，y_0)$到線 L：$ax+by+c=0$ 之距離 $d(P_0，L)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(應用：角平分線，內心)

2.線 L_1：$ax+by+c_1=0$ 到線 L_2：$ax+by+c_2=0$ 之距離 $d(L_1，L_2)=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3.點 $P_0(x_0，y_0)$到線 L：$ax+by+c=0$ 之投影點 $H(x_0-a\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}，y_0-b\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2})$

4.點 $P_0(x_0，y_0)$到線 L：$ax+by+c=0$ 之對稱點 $P'(x_0-2a\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}，y_0-2b\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2})$

Ex90. 設 $A(2，-5)$，直線 L：$x-2y+3=0$，則由點 A 作直線 L 的垂線的垂足坐標為？設 L 為線段 $\overline{AB}$ 的中垂線，則 B 點的坐標為？*Ans*：(-1,1)，(-4,7)

Ex91. 求點 $P(3，-1)$關於直線 $2x-3y+4=0$ 之對稱點坐標？Ans：(-1,5)

Ex92. 有一道光線從第一象限沿著直線 L：$3x-4y=1$ 射向 x 軸上的 P 點，經 x 軸反射後，光線沿著另一條直線 L'離去，求(1)點 P 的坐標(2)L'的方程式

Ans：$(\frac{1}{3},0)$，$3x+4y=1$

5.在 L 上找一點 P，使 $\overline{PA}+\overline{PB}$最小；$L$ 異側連線交點(同側對稱成異側)
6.在 L 上找一點 P，使 $\left|\overline{PA}-\overline{PB}\right|$最大；$L$ 同側連線交點(異側對稱成同側)
7.在 L 上找一點 P，使 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 最小；中點投影點、投影點中點
8.在平面上找一點 P，使 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 最小；算術平均(重心)

Ex93. 設 $A(2，1)$，$B(3，2)$，$C(-1+t，1+t)$，$t\in R$

(1)求點 C 的軌跡方程式(2)求?ABC 周長的最小值 Ans：$x-y+2=0$，$2\sqrt{5}+\sqrt{2}$

Ex94. 設 $x\in R$，求 $\sqrt{x^2-4x+8}+\sqrt{x^2-6x+18}$ 之最小值。Ans：$\sqrt{26}$

Ex95. 設 $A(1，0)$，$B(-1，2)$，試在直線 $L:x+2y=8$ 上取一點 P，使 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 最小，求 P 點坐標 Ans：$(\frac{6}{5},\frac{17}{5})$

Ex96. 在 xy 平面上，有三點 $A(3，0)$，$B(1，2)$，$C(-1，-2)$及點 P，則當 P 之坐標是？時，$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 之值最小，其值為？Ans：(1,0)，16

七、三角形的五心：
1.重心：三中線(點+點)交點
　彬註：算術平均公式
2.內心：三內角平分線(點線距)交點
　彬註：加權平均公式
3.外心：三中垂線(點+斜率)交點
4.垂心：三高(點+斜率)交點
5.旁心：二外角一內角平分線(點線距)交點
　彬註：加權平均公式
6.外心、重心、垂心共線；稱為尤拉線

Ex97. $\triangle ABC$ 的三頂點 $A(2，1)$，$B(7，4)$，$C(4，9)$，下列敘述那些是正確的？

$(A)\triangle ABC$ 為直角三角形$(B)\triangle ABC$ 為等腰三角形

$(C)\triangle ABC$ 的外心坐標為$(6，5)(D)\triangle ABC$ 面積為 17 Ans：ABD

Ex98. $\triangle ABC$ 中，三邊 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$上各有一分點 D，E，F，若 $A(2，-1)$，$B(3，5)$，$C(-1，2)$且 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=\frac{2004}{93}$，求$\triangle DEF$ 之重心坐標

Ans：$(\frac{4}{3},2)$

Ex99. 已知三角形的三頂點為 $A(3，3)$，$B(-1，-5)$與 $C(6，0)$，則$\triangle ABC$ 之垂心坐標為？Ans：$H(\frac{14}{3},\frac{2}{3})$

Ex100. $\triangle ABC$ 中，$A(-2，-5)$，$B(3，0)$，垂心$(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2})$，求 C 點坐標及$\triangle ABC$ 之面積？Ans：$(0,5)$，20

Ex101. 若點 $A(-3，k)$及點 $B(k，1)$都在以 $P(2，1)$為圓心的圓上，求 k 值？Ans：-11

Ex102. (1)求 $\sqrt{(x-4)^2+25}+\sqrt{(x+4)^2+1}$之最小值 m，及此時之 x 值 Ans：10，$-\frac{8}{3}$

(2)求$|\sqrt{(x-4)^2+25}-\sqrt{(x+4)^2+1}|$之最大值 M，及此時之 x 值 Ans：$4\sqrt{5}$，-6

Ex103. $A(1，9)$，$B(6，2)$

(1)在 y 軸上找一點 P 使 $\overline{PA}+\overline{PB}$有最小值，則 P 點坐標為？又此最小值為？

(2)在直線 $x-5y=12$ 上找一點 Q 使$|\overline{QA}-\overline{QB}|$有最大值，則 Q 點坐標為？又此最大值為？Ans：$(0,8)$，$7\sqrt{2}$；$(8,\frac{-4}{5})$，$\sqrt{74}$

Ex104. $\triangle ABC$ 中，$A(1，2)$，$B(-3，1)$，$C(-2，-4)$，L 為過 C 的高，求 L 方程式？過原點作直線 L 的垂線，設垂足為 H 點，求 H 點的坐標？

Ans：$4x+y=-12$，$H(-\frac{48}{17},-\frac{12}{17})$

Ex105. 已知 $A(1，2)$與 $B(3，4)$為兩定點，$P(x，y)$為直線 $x+2y=3$ 上一點，問 $\overline{PA}=\overline{PB}$時，$P$ 的坐標為？Ans：$P(7,-2)$

Ex106. 設 $m\in R$，二直線 $mx+3y+1=0$ 與 $x+(m-2)y+m=0$ 相交於第二象限內，求 m 範圍為？Ans：$1<m<3$

Ex107. 設三直線 L_1：$x-2y+3=0$，L_2：$2x+3y=0$，L_3：$ax-y-1=0$，若 L_1，L_2，L_3 不能圍成一三角形，則 a 值為？Ans：$\frac{1}{2},\frac{-2}{3},\frac{-13}{9}$

Ex108. 平面坐標系中，下列敘述何者正確？(多選)

(A)點 $P(x_0，y_0)$ 對 x 軸的對稱點為 $(-x_0，y_0)$

(B)點 $P(x_0，y_0)$ 對 y 軸的對稱點為 $(x_0，-y_0)$

(C)點 $P(x_0，y_0)$ 對原點的對稱點為 $(-x_0，-y_0)$

(D)點 $P(x_0，y_0)$ 對 $y=x$ 的對稱點為 $(y_0，x_0)$

(E)點 $P(x_0，y_0)$ 對 $y=-x$ 的對稱點為 $(-y_0，-x_0)$ Ans：CDE

Ex109. xy 平面上，下列敘述何者正確？(多選)

(A)直線 $y=-2x+7$ 之斜率為 2

(B)過兩點 $(-2，1)$，$(1，3)$ 之直線斜率為 $\frac{2}{3}$

(C)直線 $2x+3y+6=0$ 的 x 截距為 -2

(D)a，b，$c\in R$，$a\neq b$，則兩直線 $ax+by+3=0$，$bx-ay+c=0$ 互相垂直

(E)$\forall k\in R$，直線 $(2-k)x+(k+1)y+(k-3)=0$ 恆過點 $(1，1)$ Ans：BD

2-4 複數與複數平面

一、複數與虛數

1.**定義：形如** $a+bi(a，b\in R)$**的數稱為複數；其中** $i=\sqrt{-1}$**。** a **稱為實部，** b **稱為虛部。**

彬註： $i=\sqrt{-1}$ **；** $i^2=-1$ **；** $i^3=-i$ **；** $i^4=1$

2.**若** $b=0$ **則稱為實數；若** $a=0$ **則稱為純虛數**

3.**複數的四則運算**

加法、減法：實部虛部分開獨立運算

乘法：分配律

除法：分母實數化

4.**虛數無大小之分**

5.i **不置放於<u>分母</u>、** i **不置放於<u>根號</u>內**

Ex110. **求** i **之平方根** *Ans*：$\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

Ex111. $z\in C$，$z^2=3-4i$，**求** z(**求** $3-4i$ **之平方根**) *Ans*：$\pm(2-i)$

6.i **與** ω**的週期性質**

$$i=\sqrt{-1}\quad:\quad\begin{cases} i^4=1 \\ 1+i+i^2+i^3=0 \end{cases}$$

$$w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\quad:\quad\begin{cases} w^3=1 \\ 1+w+w^2=0 \\ w^2=\dfrac{1}{w}=\overline{w} \end{cases}$$

二、共軛複數：

1.**定義：設** $z=a+bi(a，b\in R)$，**則** $a-bi$ **稱為** z **的共軛複數，記為** $\overline{z}=a-bi$**。**

2.**性質：**(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$ (2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ (3) $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ (4) $\overline{\dfrac{z_1}{z_2}}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Ex112. (1)**求** $1+i+i^2+\cdots\cdots+i^{62}$ **之值**

(2)$w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，**求** $\omega^{31}+\omega^{32}+\cdots+\omega^{172}$ **之值** *Ans*：i，w

彬註 1：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{ab} & \text{otherwise} \\ -\sqrt{ab} & \text{當}a<0,b<0\end{cases}$

彬註 2：$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{a}{b}} & \text{otherwise} \\ -\sqrt{\dfrac{a}{b}} & \text{當}a>0,b<0\end{cases}$

Ex113. x，$y\in R$，**且** $x+y+i=-10+xyi$，**求** $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ *Ans*：-8

Ex114. 若 $x+\frac{1}{x}=-1$，求 $x^{19}+\frac{1}{x^{19}}$ 之值 Ans：-1

三、複數平面(高斯平面)：

複數的絕對值：

1.**定義：設** $z=a+bi(a，b\in R)$，**規定** z **的絕對值** $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

2.**幾何意義：**

(1) $|z|$：**複數** z **到原點的距離。**

(2) $|z_1-z_2|$：**複數** z_1 **與** z_2 **之間的距離。**

3.**性質：**(1) $|z|=|\bar{z}|\geq 0$ (2) $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ (3) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ (4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ (5) $|z^n|=|z|^n$

4.**三角不等式：**

兩邊和大於第三邊： $|z_1|+|z_2|\geqq|z_1+z_2|$

兩邊差小於第三邊： $||z_1|-|z_2||\leqq|z_1-z_2|$

Ex115. 設 $z=\frac{(5-12i)\cdot(7+2i)}{(2-7i)\cdot(3+4i)}$，則 $|Z|=$？Ans：$\frac{13}{5}$

Ex116. 在高斯平面上 $z_1=4+5i$，$z_2=-4+15i$

(1)求使 $|z_1-a|+|z_2-a|$ 為最小的實數 a

(2)求使 $|z_1-a|^2+|z_2-a|^2$ 為最小的實數 a Ans：2，0

四、一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0(a，b，c\in R，a\neq 0)$

1.**二根為** $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2.**根的性質：** $\begin{cases} b^2-4ac>0 & \Leftrightarrow \text{兩相異實根} \\ b^2-4ac=0 & \Leftrightarrow \text{兩相等實根(二實根}\Leftrightarrow b^2-4ac\geq 0) \\ b^2-4ac<0 & \Leftrightarrow \text{兩共軛虛根} \end{cases}$

實係數方程式⇒複根成對

3.**根與係數的關係：設實係數二次方程式** $ax^2+bx+c=0$ **二根為**α，β，**則**

(1)$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ (2)$\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$

4.**正根、負根：**

(1)**二正根：** $\begin{cases} D\geq 0 \\ a+b>0 \\ ab>0 \end{cases}$ (2)**二負根：** $\begin{cases} D\geq 0 \\ a+b<0 \\ ab>0 \end{cases}$

(3)**一正根、一負根：** $\begin{cases} D>0(\text{可略}) \\ ab<0 \end{cases}$ (4)**二根均大於** 3：$\begin{cases} D\geq 0 \\ (a-3)+(b-3)>0 \\ (a-3)(b-3)>0 \end{cases}$

5.**以**α，β**為二根的一元二次方程式為** $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

Ex117. α，β為 $x^2-2x+3=0$ 的二根，求

(1) a^2+b^2 (2) a^3+b^3 (3) a^4+b^4 *Ans*：-2，-10，-14

Ex118. α，β為 $x^2+6x+4=0$ 的二根，求 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ 之值？*Ans*：-10

Ex119. 設 $1-i$ 為 $x^2+ax+3-i=0$ 的一根，則 a 的值為何? *Ans*：-3

Ex120. 若 $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，求下列各式之值：

(1) $(2+5w+2w^2)^6$ (2) $(2-w)(2-w^2)(2-w^4)(2-w^5)$ *Ans*：729，49

Ex121. 若 $x+\dfrac{1}{x}=1$，求 $x^{16}+\dfrac{1}{x^{16}}$ 之值 *Ans*：-1

Ex122. 設 $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，求 (1) $x^{10}+\dfrac{1}{x^{10}}$ (2) $x^{89}+\dfrac{1}{x^{89}}$ *Ans*：-1，-1

Ex123. 設 $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，試證若 a，$b\in R$ 且 $a+b?=0$，則 $a=0$，$b=0$

Ex124. x，$y\in R$，且 $|x-y|+3xi=5x-2+(2-y)i$，求 $x+y$ 之值 *Ans*：$\dfrac{10}{9}$

Ex125. 若 $a\in R$，且方程式 $x^3+ax^2+2x+1=0$ 有純虛根，則 a=? *Ans*：$\dfrac{1}{2}$

Ex126. 求 $8+6i$ 的平方根 *Ans*：$\pm(3+i)$

Ex127. α，β為 $x^2-3x+5=0$ 的二根，求

(1)以α+β，αβ為二根的方程式為何? *Ans*：$x^2-8x+15=0$

(2)以 $\dfrac{b}{a^2}$，$\dfrac{a}{b^2}$ 為二根的方程式為何? *Ans*：$25x^2+18x+5=0$

Ex128. 設α，β為 $x^2+8x+6=0$ 的二根，試求 $\dfrac{b}{a^2+6}+\dfrac{a}{b^2+6}$ 之值？*Ans*：$-\dfrac{13}{12}$

Ex129. 設α，β為 x^2-2x–2=0 的二根，則 $(a^4-2a^3-2a^2+a-1)(b^4-2b^3-2b^2+b-1)$ =?
Ans：-3

Ex130. 設 α，β為 $x^2+5x+3=0$ 之二根；γ，δ為 $2x^2-4x-3=0$ 之二根，求
$(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$之值？*Ans*：$\frac{39}{4}$

Ex131. 設 x，y 為實數，$x+y-4i=1+xyi$，求 $\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}=$？*Ans*：$\frac{\sqrt{17}}{2}i$

Ex132. $k\in R$，$x^2+(k+2)x+(k+5)=0$，依下列各條件求 k 範圍：
(1)二正根(2)二負根(3)一正根，一負根 *Ans*：$-5<k\leqq-4$；$k\geqq4$；$k<-5$

Ex133. $\forall m\in Q$，二次方程式 $mx^2+(m-2)x+n=0$ 之根恆為有理數，求有理數 n *Ans*：0,-2

Ex134. 設 $m\in Q$，且 $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}m-2=0$ 有有理根，求 m 之值 *Ans*：2，-1

Ex135. $x\in R$，若 $x^2-2x+a=0$ 的二根絕對值之和為 4，求 a 值($a\in R$) *Ans*：-3

Ex136. 方程式 $x^2-11x+(k+30)=0$ 之二根均大於 5，求實數 k 的範圍？*Ans*：$0<k\leq\frac{1}{4}$

Ex137. 設 $k\in Z$，且 $x^2-(k+3)x+2k-1=0$ 二根均為整數，求 k 值？*Ans*：3，-1

Ex138. 解方程式 $|x^2-4|=2x-1$ *Ans*：3，$-1+\sqrt{6}$

Ex139. 若 a 與 $a+2$ 為異號的兩實數，且均為方程式 $x^2+|x|+3k=0$ 的解，求 k？
Ans：$\frac{-2}{3}$

Ex140. 設實係數二次方程式 $x^2+x+c=0$ 的兩根 a，b 都不是實數，
而且 $\frac{1}{a},\frac{1}{b}$ 也正是此方程式的兩根，則 a^2+b^2 的數值為何？*Ans*：-1

Ex141. 設 $m\in R$，方程式 $x^4+(m-5)x^2+(m+3)=0$ 有(1)相異四實根(2)二實根，二虛根(3)四個純虛根，試分別求 m 的範圍？*Ans*：$-3<m\leqq1$；$m<-3$；$m>13$

Ex142. 某人向銀行貸款 20000 元，一年後償還 12000 元，再一年又償還 14400 元，恰將本息還清，試求年利率？*Ans*：20%

Ex143. 將一張 $B4$ 的長方形紙張對折剪開之後，成為 $B5$ 的紙張，其形狀跟原來 $B4$ 的形狀相似。已知 $B4$ 紙張的長邊為 36.4 公分，則 $B4$ 紙張的短邊長為幾公分？(四捨五入取點後一位) *Ans*：25.7

Ex144. 有一邊長為 3 的正六邊形紙板，今在每一個角各剪掉一個小三角形，使其成為正十二邊形之紙板，則此正十二邊形之一邊長為何？*Ans*：$6\sqrt{3}-9$

Ex145. 設一直角三角形之周長為 2，面積為 s，兩股長為 a，b，
(1)求作以 a，b 為兩根之一元二次方程式
(2)求三角形面積 s 的最大值 *Ans*：$x^2-(1+s)x+2s=0$，$3-2\sqrt{2}$

Ex146. 甲、乙兩生同解一整係數方程式，甲生看錯 x^2 之係數得二根為 $\frac{5}{4}$ 與 $-\frac{3}{10}$，乙生用公式解，判別式計算錯誤得二根為 $\frac{13}{12}$ 與 $-\frac{7}{24}$，試求正確的方程式？
Ans：$48x^2-38x-15=0$

Ex147. 複數 $\frac{10i}{1-2i+3i^2-4i^3}$ 的共軛複數為 $a+bi$，a，$b\in R$，則$(a，b)=$？*Ans*：$(\frac{5}{2},\frac{-5}{2})$

Ex148. 設複數平面上有一正方形 $ABCD$，$A(0)$，$B(3+2i)$，D 在第二象限內，試求出 C，D 所在位置(複數表示) *Ans*：$C(1+5i)$，$D(-2+3i)$

Ex149. a 為實數，若方程式 $x^2+(i-3)x+2a+i=0$ 有實根，試求 a 值，並求方程式之根？*Ans*：-2；-1，$4-i$

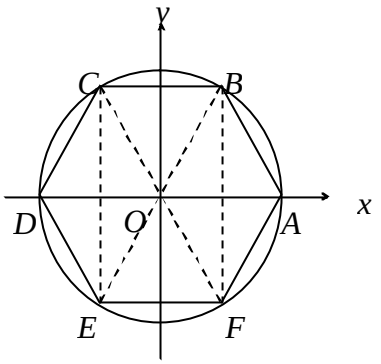
Ex150. 已知方程式 $x^2-(3+2i)x+5(1+i)=0$，求 x？*Ans*：$2-i$，$1+3i$

Ex151. 設 $1-i$ 為 $x^2+ax+3-i=0$ 的一根，則 a 的值為何？$(A)-3(B)-2(C)-1-i(D)2(E)3$ *Ans*：A

Ex152. 設 $z=3+2i$，且 $w=\frac{z-1}{z+1}$，則 ω 之共軛複數 $\overline{w}$ 之虛部為？*Ans*：$-\frac{1}{5}$

Ex153. 若$(2-i)x^2-3(1-i)x-2(1+i)=0$ 有實數解，求另一虛根為？*Ans*：$-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$

Ex154. **在複數平面上，六邊形** $ABCDEF$ **是以原點** O **為圓心，**1 **為半徑之圓的內接正六邊形，如圖所示，若點** A **代表之複數為** 1**，試求各頂點** B**，**C**，**D**，**E**，**F **所代表之複數。**Ans**：** $B(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$、$C(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$、$D(-1+0i)$、$E(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$、$F(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$、



Ex155. **設** $f(x)=x^{100}+x^{50}+1$**，求** $f(-\frac{1+i}{\sqrt{2}})$**之值？**Ans**：**i

Ex156. **設** $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$**，則** $1+z^{88}+\sqrt{2}z^{1999}=$ **？**Ans**：**$3-i$

Ex157. $\frac{5i^5+4i^3+1}{8i^9-5i-3}$**的絕對值為？**$Ans$**：** $\frac{1}{3}$

Ex158. **滿足**$|z-(1+i)|=|z+i|$**的複數** z **在複數平面上形成的圖形名稱為何**?Ans**：直線**

Ex159. **設** $z\in C$**，**$|z-2+i|=\sqrt{2}$**，求**$|z-(6-3i)|$**的** Max **與** min**？**Ans**：** $2\sqrt{5}\pm\sqrt{2}$