1-1 條件機率與貝氏定理

一、條件機率：

1.設 A 為樣本空間 S 中的非空事件 $P(A)>0$，B 為 S 中的任意事件。則 A 事件發生的條件下，B 事件發生的條件機率記作 $P(B|A)$，且 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

註：可將 $P(B|A)$視為 $P(B/A)$、$P(\dfrac{B}{A})$，以事件 A 已發生的基礎下，求事件 B 的機率，更易了解其意義。

2.若每個樣本點發生的機率都相等，則 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$

3.條件機率的性質

設 A，B，C 為樣本空間 S 中之任意三事件，且設 $P(C)>0$，則有

(1)$P(\varnothing|C)=0$

(2)$P(C|C)=1$

(3)$0\le P(A|C)\le 1$

(4)$P(A'|C)=1-P(A|C)$

(5)$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(A\cap B|C)$

(6)若 $A\subseteq B$，則 $P(A|C)\le P(B|C)$

Ex1. 設 A，B 為兩事件且 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\dfrac{7}{12}$，試求

①$P(A\cap B)$=_____②$P(A\,|\,B)$=_____③$P(B\,|\,A)$=_____④$P(A'\,|\,B)$=_____

⑤$P(B'\,|\,A')$=_____答:① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

Ex2. 袋中有紅、黃、藍、白四色球，數量各相等，若連續抽取 4 次，取出隨即放回，令 A 表所取四球中有三種不同顏色的事件，B 表有兩種不同顏色的事件，C 表恰有兩個紅色的事件，求(1)$P(A\cap C)$(2)$P(B\cap C)$(3)$P(A|C)$(4)$P(B|C)$

答：(1) $\dfrac{9}{64}$ (2) $\dfrac{9}{128}$ (3) $\dfrac{2}{3}$ (4) $\dfrac{1}{3}$

Ex3. 一袋中有 5 個白球，8 個黑球。從袋中連續取出三球(每一次一球)取出不再放回袋中,求下列各類的機率:①三球中至少有一白球的機率為_____②在第二次取出者為黑球的機率為_____③在第二次取出黑球的條件下，則第一次取得黑球的機率為___答:① $\dfrac{115}{143}$ ② $\dfrac{8}{13}$ ③ $\dfrac{7}{12}$

4.條件機率的乘法性質：(次序可調)

(1)$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$

註：A 且 B = 先 A 後 B = 先 B 後 A

(2)$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)=P(B)\cdot P(C|B)\cdot P(A|B\cap C)$

註：A 且 B 且 C = 先 A 再 B 後 C = 先 B 再 C 後 A

(3)$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$

Ex4. 袋中有相同的紅球 5 個，白球 3 個，綠球 4 個，今從袋中每次取出一球，連取三次，求下列各情形的機率：(1)每次取出後不放回，依次為紅球、白球、綠球。(2)每次取出後不放回，得一紅球，一白球，一綠球。(3)每次取出後仍放回，得一紅球，一白球，一綠球。(4)每次取出後仍放回，依次為紅球、白球、綠球。答：$\frac{1}{22},\frac{3}{11},\frac{5}{24},\frac{5}{144}$

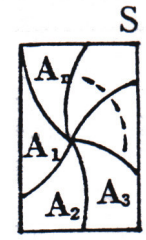
二、貝士定理：

1.分割(*Partition*)：設 A_1、A_2、……、A_r 是樣本空間 S 的事件，且滿足

(1)$A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_r=S$ (合為全)

(2)$A_i\cap A_j=\varnothing$，$\forall i\neq j$，i，$j=1$，2，……，r (交為空)

則稱$\{A_1$，A_2，……，$A_r\}$是樣本空間 S 的一個分割。



2.設$\{A_1$，A_2，……，$A_r\}$是樣本空間 S 的一個分割，

B 是任意事件，$P(B)>0$，則

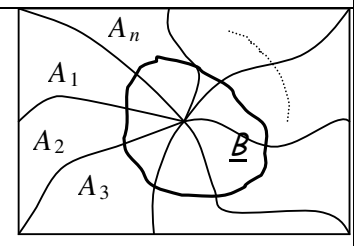
(1)$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\cdots\cdots+P(B\cap A_n)$

$=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+\cdots\cdots+P(A_n)\cdot P(B|A_n)$

$=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)(B\mid A_k)$

(2)$P(A_j|B)=\dfrac{P(A_j\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B\mid A_k)}$(貝士定理)

(3)已知事前機率 $P(A_j)$，求得事後機率 $P(A_j|B)$



Ex5. 設工廠有三部機器甲,乙,丙分別生產全部產品的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，又設甲,乙,丙三部機器生產的不良產品，分別為 2%、3%、4%，(1)從所有產品中取一產品，問取中不良產品之機率(2)已知取中一不良產品之條件，問此產品來自乙機器之機率答:(1)$\frac{2}{75}$(2)$\frac{3}{8}$

Ex6. 甲袋中有 3 藍，5 白球，乙袋中有 4 藍，4 白球，丙袋中有 2 藍，6 白球,今任選一袋任取二球(選袋取球機會均等)，①求取得二白球之機率②已知取得二白球，求取自甲袋的機率答：$\frac{31}{84}$，$\frac{10}{31}$

Ex7. 某生參加一項考試，題目都是五選一的單選選擇題，若他知道正確答案，則選正確答案，否則任意選擇其中之一，假設這個學生知道 70%的答案，則(1)他每一題得分的機率為何?(2)若某一題他知選對了答案，則該題他確實知道正確答案的機率為何?答：(1)$\frac{19}{25}$(2)$\frac{35}{38}$

Ex8. 設 A,B 為二事件，$P(A)=\frac{3}{8}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(A\cup B)=\frac{7}{8}$，求(1)$P(A\cap B)$ (2)$P(A|B)$(3)$P(B|A)$(4)$P(A'|B)$(5)$P(A'|B')$答:(1)$\frac{1}{4}$(2)$\frac{1}{3}$(3)$\frac{2}{3}$(4)$\frac{2}{3}$(5)$\frac{1}{2}$

Ex9. 設 A,B 為二事件，若已知 $P(A\cup B)=\frac{8}{9}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$，$P(A')=\frac{1}{4}$，則 $P(A'|B)=?$答：$\frac{5}{11}$

Ex10. 設 A,B 為二事件,$P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B)=\frac{1}{4}$,$P(A\cup B')=\frac{11}{12}$，試求(1)$P(A|B)(2)P(B'|A')$答：$\frac{2}{3},\frac{7}{8}$

Ex11. 擲 2 粒公正骰子，設 $A=\{(x,y)|x+y=10\}$，$B=\{(x,y)|x<y\}$，求(1)$P(B|A)$(2)$P(A|B)$答：(1)$\frac{1}{3}$(2)$\frac{1}{15}$

Ex12. 擲一正面出現之機率為$\frac{1}{2}$的硬幣四次，令 A 表示首兩次出現正面的事件；B 表四次中至少三次為正面的事件，則 $P(A|B)=$_____答:$\frac{3}{5}$

Ex13. 一硬幣連擲 5 次，A 表首兩次出現正面的事件，B 表 5 次中至少 3 次出現正面的事件，求 $P(B|A)$及 $P(A|B)$。答：$\frac{7}{8}$，$\frac{7}{16}$

Ex14. 擲一個公正的骰子三次，A 表三次中至少出現一次 6 點的事件，B 表示三次中至少出現一次 1 點的事件，則 $P(B|A)=?$答：$\frac{30}{91}$

Ex15. 設一袋中有 10 個球，其中白球 6 個，紅球 4 個，今自袋中取球每次取一個，取後不放回共取三次，假設在取出之三球中恰有二白球的條件下，求第二次抽到白球之機率=_____答:$\frac{2}{3}$

Ex16. A 袋中有白球 5 個，黑球 5 個，B 袋中有白球 6 個，黑球 4 個，現擲骰子，若點數為 1、2 者，自 A 袋任選一球，點數為 3、4、5、6 者自 B 袋任選一球、求選得白球之機率為_____答:$\frac{17}{30}$

Ex17. (1)連續拋擲銅板 4 次，出現偶數次(包括 0 次)正面的機率為何？
(2)連續拋擲銅板 10 次，若已知前 4 次中出現偶數次(包括 0 次)正面，則全部 10 次拋擲中出現 6 次正面的條件機率為何？答：$\frac{1}{2}$，$\frac{53}{256}$

Ex18. 投擲兩枚公正骰子，若已知兩枚骰子投出之點數和是偶數，求點數和小於 5 之機率。答：$\frac{2}{9}$

Ex19. 重複投擲一個公正的硬幣 8 次，(1)求恰好在第五次出現第 3 個正面的機率？
(2)已知前五次出現了奇數次正面，則全部的 8 次中至少出現 5 次正面的條件機率為何?答：(1)$\frac{3}{16}$(2)$\frac{3}{8}$

Ex20. (1)設袋中有 12 個球，其中有 8 個白球。從袋中逐次取出 4 球，每次取出之球仍放回袋中，試求在抽中 3 個白球的條件下，第 3 次抽中白球的機率。
(2)承(1)，若取出之球不放回，則其機率為何?答：(1)$\frac{3}{4}$(2)$\frac{3}{4}$

Ex21. 某公司生產的 20 個產品中，有四個不良品，現在逐一檢查，
(1)若取後不放回，求在第五次發現第 3 個不良品的機率？
(2)若取後放回，求在第五次發現第 3 個不良品的機率？答：(1)$\frac{6}{323}$(2)$\frac{96}{3125}$

Ex22. 已知在一箱中有 60 個燈泡，其中有 8 個燈絲斷了，現作逐個檢查到第五個時，是第三個斷了燈絲的燈泡的機率=_____答:$\frac{52}{60}\cdot\frac{51}{59}\cdot\frac{8}{58}\cdot\frac{7}{57}\cdot\frac{6}{56}\cdot\frac{4!}{2!2!}$

Ex23. 某暢銷書「草莓百分百」，A、B、C 三店今日缺貨的機率依序為$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$，小彬今日想買這本書，先前往 A 店，買到就回家否則前往 B 店購買，若在 B 店買到就回家否則前往 C 店購買，在 C 店不論有否買到都接著回家。若爸爸看到小彬買到書回家並猜測其在 B 店買到書,則爸爸猜對的機率為？答：$\frac{8}{23}$

Ex24. 某城市的人口中女性占 40%，男性占 60%。已知男性中有 40%的人抽煙，女性中有 30%的人抽煙，則：(1)若隨意抽出一人，不知其為男性或女性，只知其為抽煙者，求此人為男性的機率。(2)若已知這個人為不抽煙者，求此人為男性的機率。答：$\frac{2}{3},\frac{9}{16}$

Ex25. 設某工廠由甲、乙、丙三台機器製造某一產品，甲生產全部產品的 50%，乙生產全部產品的 30%，丙生產全部產品的 20%。依過去的經驗知甲的產品中有 3%，乙有 4%，丙有 5%為不良品。從產品中任選一產品，(1)求選出之產品為不良品的機率。(2)若該產品為不良品，求此產品由甲廠製造的機率。答：(1)0.037(2) $\frac{15}{37}$

Ex26. 某校橋藝社由甲，乙，丙三班同學組成，各佔 40%，30%，30%，社員中甲班人數的 $\frac{1}{5}$，乙班人數的 $\frac{1}{5}$，丙班人數的 $\frac{1}{3}$ 亦為籃球校隊隊員。某次橋藝社推選新社長，每人當選的機會均等，則(1)籃球隊員當選的機率為何?(2)若由籃球隊員當選社長，則他是甲班同學的機率為何?答：(1) $\frac{6}{25}$ (2) $\frac{1}{3}$

Ex27. 某大學一、二、三、四年級各佔 30%,25%,25%,20%,患近視眼者一年級 50%，二年級有 60%，三年級有 70%，四年級有 80%，求從近視的學生中任選 1 人，則此人為二年級學生之機率為？答：$\frac{30}{127}$

Ex28. 設 A 袋中有 3 白 5 黑球,B 袋中有 3 白 1 黑球,C 袋中有 2 白 3 黑球,今自 A 袋中任取二球放入 B 袋中,再從 B 袋中取出一球放入 C 袋,求 B 袋中仍恰一黑球之機率答:$\frac{15}{56}$

Ex29. 設甲袋中有紅球 3 個，白球 5 個；乙袋中有紅球 2 個，白球 1 個，黑球 2 個。先依機會均等的原則選出甲袋或乙袋，再從選出之袋中取出一球，求取出紅球的機率為何?答：$\frac{31}{80}$

Ex30. 甲說實話的機率為 0.7，乙說實話的機率為 0.9。現有一袋內藏 3 白球，7 紅球，自袋中任取一球，甲、乙均說為白球，求此球確為白球的機率。答：$\frac{9}{10}$

Ex31. 朋友間來往書信，若信在途中遺失的機率為 0.2%，沒回信的機率為 5%。今甲寄出一封信給乙，在已知甲沒有收到回信的條件下，問此封信乙有收到甲的信的機率為何?答：0.963

Ex32. 某次考試，學生中有 40%英文不及格，30%數學不及格，20%英、數皆不及格。任選一學生，若只有一科不及格，求恰為數學不及格的機率。答：$\frac{1}{3}$

Ex33. 甲，乙，丙三人命中目標之機率分別為$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，每人只射一次且互不影響，若已知僅一人擊中目標，這人是甲的機率為何?答：$\frac{6}{11}$

Ex34. 某種疾病的檢驗方法不是百分之百正確：依過去的經驗知道，患有此疾病的人檢驗能正確判斷的可能性為 0.92；不患有此疾病的人，則檢驗做了錯誤判斷的可能性為 0.04。設一群人中已知有 20%的人患有此疾病，而從這一群人中任選一人加以檢驗，則檢驗判定患有此疾病的機率為何?[79 年社]答：0.216

Ex35. 甲、乙、丙三袋中，甲袋有 3 白球 2 黑球，乙袋有 2 白球 2 黑球，丙袋有 2 白球 1 黑球，今從三袋中各取出一球，則至少取出 2 黑球之機率為何?[83 年社]答：$\frac{11}{30}$

Ex36. 某品牌之燈泡由 A 廠及 B 廠各生產 30%及 70%。A 廠生產之產品中有 1%瑕疵品；B 廠生產之產品中有 5%瑕疵品。某日退貨部門回收一件瑕疵品，則下列敘述那些是正確的?(A)猜此瑕疵品是 A 廠製造的，猜對的機率較大。(B)猜此瑕疵品是 B 廠製造的，猜對的機率較大。(C)此瑕疵品由 A 廠製造的機率為$\frac{3}{38}$。(D)此瑕疵品由 A 廠製造的機率為$\frac{30}{10000}$。(E)此瑕疵品由 B 廠製造的機率為$\frac{350}{10000}$。[85 學測]答：BC

Ex37. 擲三枚相同且均勻的銅板一次。則在至少出現一個正面的條件下，恰好出現兩個正面的機率為何?[87 年社]答：$\frac{3}{7}$

Ex38. 擲三粒均勻骰子一次，則在至少出現一次 4 點的條件下，其點數和為偶數的機率為何?[86 年自]答：$\frac{46}{91}$

Ex39. 袋中有六個乒乓球，分別編號為 1,2,3,4,5,6。每次自袋中隨機抽取一球，然後將袋中編號為該球號碼之因數或倍數者一併自袋中取出(例如第一次抽中 2 號球，則將 1 號、2 號、4 號、6 號四球皆取出)，再進行下一次的抽取。試問最後一次抽取時，袋中只剩 5 號球的機率是多少?[89 年自]答：$\frac{7}{18}$

Ex40. 調查某新興工業都市的市民對市長施政的滿意情況，依據隨機抽樣，共抽樣男性 600 人、女性 400 人，由甲、乙兩組人分別調查男性與女性市民。調查結果男性中有 36%滿意市長的施政，女性市民中有 46%滿意市長的施政，則滿意市長施政的樣本佔全體樣本的百分比為何?[90 學測]答：40%

Ex41. 根據過去紀錄知，某電腦工廠檢驗其產品的過程中，將良品檢驗為不良品的機率為 0.20，將不良品檢驗為良品的機率為 0.16。又知該產品中，不良品佔 5%，良品佔 95%。若一件產品被檢驗為良品，但該產品實際上為不良品之機率為何?(小數點後第三位四捨五入)[90 學測]答：0.01

Ex42. 交通規則測驗時，答對有兩種可能，一種是會做而答對，一種是不會做但猜對。已知小華練習交通規則筆試測驗，會做的機率是 0.8。現有一題 5 選 1 的交通規則選擇題，設小華會做就答對，不會做就亂猜。已知此題小華答對，試問在此條件之下，此題小華是因會做而答對(不是亂猜)的機率是多少?[89 學測]答：$\frac{20}{21}$

Ex43. 宴會在場的 50 位賓客有人偷了主人的珠寶，由於賓客身上都沒有珠寶，而且他們都不承認偷竊，警方決定動用測謊器，並且只問客人一個問題：「你有沒有偷珠寶？」。已知若某人說謊，則測謊器顯示他說謊的機率為 99%；若某人誠實，則測謊器顯示他誠實的機率是 90%。下列敘述何者正確？
(1)設竊賊只有一人。當賓客受測時，測謊器顯示賓客說謊的機率大於 10%
(2)設竊賊只有一人。當測謊器顯示一賓客說謊時，該賓客正是竊賊的機率大於 50%
(3)設竊賊只有一人。當測謊器顯示一賓客誠實時，該賓客卻是竊賊的機率小於 20%
(4)當測謊器顯示一賓客說謊時，該賓客是竊賊的機率，並不因竊賊人數多少而改變[94 自]答：(1)(3)

Ex44. 全班男女生共 51 人，票選畢業旅行的目的地，每人限投一票，投票結果：墾丁(女 10 男 10)澎湖(女 6 男 10)花東(女 9 男 6)。現以簡單隨機抽樣，抽出兩人，若此兩人都是女生，則這兩人都想去墾丁的機率是_____
[94 自]答：0.15

1-2 獨立事件

一、獨立事件：

1.獨立二事件：設 A，B 為樣本空間 S 中的任二事件

(1)定義：若 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$則稱 A，B 為獨立事件，否則稱為相關事件。

(2)性質：當 A，B 為獨立事件，則下列亦為獨立事件：

A 與 B'　　A'與 B　　A'與 B'

2.獨立三事件 A，B，C：設 A，B，C 為樣本空間 S 中的任三事件

(1)定義：若 A，B，C 兩兩獨立且 $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$，亦即滿足下列各式：

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$

$P(C\cap A)=P(C)\cdot P(A)$

$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

必要條件之反例：

$S=\{1,\ldots,12\}$、$A=\{2,4,6,8,10,12\}$、$B=\{3,6,9,12\}$、$C=\{2,5,6,7,11,12\}$

(2)性質：當 A，B，C 三事件獨立，則下列均為獨立事件：

A，B，C'　　A，B'，C　　A'，B，C

A，B'，C'　　A'，B，C'　　A'，B'，C

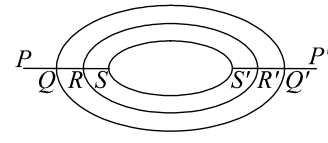
A'，B'，C'

Ex45. 設 $P(A)=0.2$，$P(A\cup B)=0.6$，(1)若 A,B 為互斥事件，則 $P(B)=$_____。(2)若 A,B 為獨立事件，則 $P(B)=$_____，$P(B'|A)=$_____。(3)若 A,B 為相關事件，則 $P(B)$的範圍為何？答：(1)0.4(2)0.5;0.5(3)$0.4\le P(B)\le 0.6$，$P(B)\ne 0.5$

Ex46. 甲,乙兩城市之間的公路上有 A,B,C 三處紅綠燈,每處紅綠燈每一分鐘循環一次且設出現綠燈時間分別為 30 秒,40 秒,50 秒；若一汽車經過遵守交通規則，則下列各情況之機率為何?(1)甲城直開乙城之機率為_____(2)遇到一次紅燈機率為_____(3)遇到二次紅燈機率為_____(4)遇到三次紅燈機率為_____答:(1)$\frac{5}{18}$(2)$\frac{17}{36}$(3)$\frac{2}{9}$(4)$\frac{1}{36}$

Ex47. 已知甲，乙，丙三射手的射擊命中率各為 0.5，0.6，0.8。今三人同射一靶，每人一發，設各人命中靶面的事件為獨立事件，則(1)靶面恰中一發的機率為何?(2)沒有人命中靶面的機率為何?(3)若靶面恰中一發，則是由甲命中的機率為何?答：(1)0.26(2)0.04(3)$\frac{2}{13}$

Ex48. 右方路線圖中，甲自 P 往 P'，乙自 P'往 P，二人同時出發以相同的速率前進，在各分叉點選擇方向之機率相等，求二人在途中相遇的機率答：$\frac{41}{162}$



3.重複試驗：試驗可在相同條件下重複進行，每次成功的機率 p，每次均為獨立，則
(1)n 次試驗皆成功的機率是 p^n
(2)n 次試驗皆失敗的機率是$(1-p)^n$，至少成功一次的機率是 $1-(1-p)^n$
(3)n 次試驗中恰成功 k 次的機率是 $C_k^n p^k(1-p)^{n-k}$，k=1，2，3，……，n

Ex49. 老羅打棒球,打全壘打的機率為 $\frac{2}{3}$，今全壘打比賽規定 5 球中至少打中 4 球，則為全壘打王,求老羅封王之機率答:$\frac{112}{243}$

Ex50. 擲一公正的骰子 n 次，設 A 表「至少出現一次么點」的事件，則使 $P(A)>99.8\%$之最小 n 值為何?($log2=0.3010, log3=0.4771$)答：35

Ex51. 設 A,B,C 為 S 中之三個獨立事件,且 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{2}{5}$，$P(C)=\frac{3}{4}$，則
(1)$P(A\cap B\cap C)$=__(2)$P(B\mid C)$=_____(3)$P(C'\mid A\cup B)$=_____答：(1)$\frac{1}{10}$(2)$\frac{2}{5}$(3)$\frac{1}{4}$

Ex52. (1)設 A,B 為獨立事件，$P(A)=0.7$，$P(A'\cap B')=0.18$，則 $P(B)$=?(2)設 A,B 為獨立事件，$P(A|B')=0.5$，$P(A\cap B')=0.3$，則 $P(B)$=?答：(1)0.4(2)0.4

Ex53. 三獨立事件 A,B,C，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{24}$，$P(A'\cap B'\cap C')=\frac{1}{4}$又 $P(C)>P(B)$，試求：(1)$P(B)$及 $P(C)$(2)A,B,C 中恰有一事件發生的機率。
答：(1)$P(B)=\frac{1}{4}$，$P(C)=\frac{1}{3}$(2)$\frac{11}{24}$

Ex54. 設 A,B 為獨立事件，$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B|A)=\frac{1}{2}$，求(1)$P(A\cap B)$(2)$P(A\cup B)$
答：(1)$\frac{1}{6}$(2)$\frac{2}{3}$

Ex55. 有三人譯密碼，能譯出的機率分別為 $\frac{1}{5}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，現三人合譯一密碼，則能譯出的機率為何?答：$\frac{3}{5}$

Ex56. 一數學題目，甲能解出的機率為 $\frac{1}{2}$，乙能解出的機率為 $\frac{1}{3}$；若甲，乙同解某一問題且不互相影響，求：(1)甲，乙兩人均解出的機率。(2)甲，乙兩人恰有一人解出的機率。(3)甲，乙兩人均解不出的機率。(4)此題被解出的機率。答：(1)$\frac{1}{6}$(2)$\frac{1}{2}$(3)$\frac{1}{3}$(4)$\frac{2}{3}$

Ex57. 設 $x,y,z\in N$，且 x,y,z 為偶數的機率分別為 $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，

求在 $xy+z$ 為奇數的條件下，xy 為偶數的機率？答：$\frac{5}{8}$

Ex58. 有一獵人射擊距 50 碼處的一隻野鹿，其命中率為 $\frac{1}{2}$；若沒射中，可再射第二次，但此時距離為 100 碼；若再沒射中，可再射最後一次，此時距離為 150 碼，已知此獵人的命中率與距離的平方成反比，則該隻野鹿被射中的機率為何?答：$\frac{169}{288}$

Ex59. 設甲，乙，丙三射手之命中率依次為 p,q,r，其中 $p>q>r$。今三人同打一靶，各發一彈時，此靶不中彈的機率為 $\frac{1}{4}$，恰中一彈的機率為 $\frac{11}{24}$，恰中二彈的機率為 $\frac{1}{4}$，試求 p,q,r 之值。答：$p=\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{3}$，$r=\frac{1}{4}$

Ex60. 甲，乙二人射擊，甲平均每五發中四發，乙平均每四發中三發，今二人對同一靶各射擊<u>一發</u>，若各人命中靶面的事件為獨立事件，則此靶(1)恰中二發的機率為何?(2)恰中一發的機率為何?(3)不被射中的機率為何?

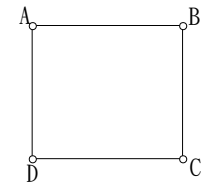
答：(1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{7}{20}$ (3) $\frac{1}{20}$

Ex61. 甲，乙二人射擊，甲平均每五發中四發，乙平均每四發中三發，今二人對同一靶各射擊<u>二發</u>，若各人命中靶面的事件為獨立事件，則此靶(1)恰中二發的機率為何?(2)恰中三發的機率為何?答：(1) $\frac{73}{400}$ (2) $\frac{21}{50}$

Ex62. 下雨天的翌日也下雨的機率是 $\frac{1}{3}$，非下雨天的翌日下雨的機率是 $\frac{1}{2}$，

今假設第一天是下雨天,則第四天也是下雨天的機率為_____答: $\frac{23}{54}$

Ex63. 有一人流浪於 A,B,C,D 四鎮間，此四鎮相鄰關係如圖。



假設每日清晨，此人決定當日夜晚繼續留宿該鎮或改而前往相鄰任一鎮之機率皆為 $\frac{1}{3}$。若此人第一夜宿於 A 鎮，而第三夜亦宿於 A 鎮之機率為何?

而第五夜此人宿於 A 鎮之機率為何?宿於 B 鎮之機率為何?

答：$\frac{1}{3},\frac{7}{27},\frac{20}{81}$

Ex64. 連續擲一銅板五次，求(1)恰好出現 3 次正面的機率(2)至少出現 3 次正面的機率(3)恰好在第 4 次擲出第 3 次正面的機率答：(1) $\frac{5}{16}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{16}$

Ex65. 甲、乙兩順次擲 2 個骰子，規定在乙擲得 7 點以前甲擲得 6 點，則甲勝，在甲擲得 6 點以前乙擲得 7 點，則乙勝。求甲、乙兩人獲勝之機率各為何?
答:甲 $\frac{30}{61}$ 乙 $\frac{31}{61}$

Ex66. 設老王、老李二人桌球實力相當，二人對打獲勝機率各為 0.5，沒有平手。今二人正式對抗,規定先勝 5 場者為冠軍,到上午為止,老王勝 2 場,
老李勝 3 場，下午繼續比賽,則老李此次勝的機會為_____。答：$\frac{11}{16}$

Ex67. 擲一個骰子，問須連擲幾次，其出現 6 點的機率達到 $\frac{2}{3}$?答：7

Ex68. 連續擲一個銅板，欲使「至少出現一次正面」的機率大於 0.999，則理論上最少須擲幾次?答：10

Ex69. 甲，乙，丙三人射擊中靶的機率分別為 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，則甲、乙各射一發，而丙至少應射幾發子彈，可使命中率達 0.999 以上?答：4

Ex70. 同大小的球 5 個，各寫上 1，2，3，4，5 號後，放入一袋中。今由其中任取一球，記下號碼後再放回袋中，若每次取球互不影響，如此連續操作 n 次，令 P_n 表示記錄到第 n 次時，數字和為偶數的機率，則(1)P_1=____，P_2=____，P_3=_____(2)P_n=_____(以 P_{n-1} 表示)(3) $\lim_{n\to\infty} P_n$=_____
答：(1) $\frac{2}{5};\frac{13}{25};\frac{62}{125}$ (2) $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P_{n-1}$ (3) $\frac{1}{2}$

Ex71. 設某一球員每次投籃命中率為 50%，要使它在 n 次投籃中，起碼會命中一次的機會超過 90%，則 n 之最小值為何?[56 年自]答：4

Ex72. 設四位射手的命中率均為 p，今四人同射一靶，各發一彈，則此靶至少中二彈的機率為何?[58 年社]答：$p^2(3p^2-8p+6)$

Ex73. 甲，乙二人擲兩顆標準骰子為戲，規定由甲先擲，得點數和為 6 則勝，否則改由乙擲，得點數和為 7 則勝，如此輪流，直至一人獲勝為止。設甲獲勝之機率為 p，乙獲勝之機率為 q，不分勝負的機率為 r(注意 $p+q+r=1$)，則 p=___，q=___，r=_____。[75 夜大]答：$p=\frac{30}{61},q=\frac{31}{61},r=0$

Ex74. 一袋有 4 白球 5 紅球。甲，乙二人輪流(甲先乙後)由袋中每次任取一球，且約定先取得白球者為勝並停止取求，(1)若取後不放回，則甲勝的機率為何?乙勝的機率為何?(2)取後放回，則甲勝的機率為何?[78 夜大]
答：$\frac{40}{63},\frac{23}{63},\frac{9}{14}$

Ex75. 投擲一公正骰子，至少需連擲多少回，其中一點至少出現一次的機率，方能達到 $\frac{2}{3}$ 以上?(A)4 回(B)5 回(C)6 回(D)7 回(E)8 回[79 夜大]答：D

Ex76. 甲，乙輪流擲一均勻骰子，言明先擲出"1"點者獲勝。如果由甲先擲，那麼甲在第二次投擲時獲勝的機率為何？[78 日大]答：$\frac{25}{216}$

Ex77. 假設任意取得之統一發票，其號碼之個位數字為 0,1,2,……,9 中任一數字，且這些數出現之機率均相等。今自三不同場所，各取得一張統一發票，則三張發票號碼的個位數中：(1)至少有一個為 0 之機率為何?(2)至少有一個為 0 且至少有一個為 9 之機率為何?[80 年自]答：0.271,0.054

Ex78. 設 A,B 兩箱中,A 箱有兩球，一黑一白,B 箱內有一白球。甲乙兩人輪流取球,每次先由甲自 A 箱內任取一球放入 B 箱內,再由乙自 B 箱內任取一球放入 A 箱內,這樣為一局。那麼當第一局結束時,A 箱內兩球為一黑一白的機率為？當第三局結束時,A 箱內兩球為一黑一白的機率為？[81 自]答：$\frac{3}{4}$，$\frac{43}{64}$

Ex79. 甲、乙、丙三袋中,甲袋有 2 黑球 3 白球,乙袋有 2 黑球 2 白球,丙袋有 1 黑球 2 白球。自甲乙丙三袋中各任取 1 球,至少取出 2 黑球的機率為？[83 社]答：$\frac{11}{30}$

Ex80. 林先生和陳小姐一起到遊樂場玩打靶游戲。林先生的射擊命中靶的機率是 2/5，陳小姐的機率是 1/2。林先生先射，陳小姐後射；林先生射中與否不會影響陳小姐的命中率。若他們兩人向靶各射一次，問只有陳小姐射中的機率為何?[84 學測]答：$\frac{3}{10}$

Ex81. 設某藥物對一般病人有過敏反應之機率為 0.1，今有三位病人接受此藥物之治療，如果此三位病人是否有過敏反應相互不影響，試求至少有一位病人有過敏反應之機率。[82 夜大]答：0.271

Ex82. 甲，乙，丙三射手同射一靶，設甲，乙，丙之射擊命中率各為 p,q,r，其中 $p>q>r$。今三人對同一靶各射擊一發，此靶不被射中的機率為 $\frac{4}{15}$，此靶恰被射中一發的機率為 $\frac{7}{15}$，恰被射中二發的機率為 $\frac{7}{30}$。試求 p,q,r 之值。(假設各人命中靶面的事件為獨立事件)[83 夜大]答：$\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$

Ex83. 有一種丟銅板的遊戲，其規則為：出現正面則繼續丟，出現反面則出局。那麼連續丟五次還可以繼續丟的機率為 $(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{32}$，某班有 40 名學生，每人各玩一局，設班上至少有一人連丟五次還可以繼續丟的機率為 p，則 $(A)0.4\leqq p<0.5$ $(B)0.5\leqq p<0.6$ $(C)0.6\leqq p<0.7$ $(D)0.7\leqq p<0.8$ $(E)0.8\leqq p<0.9$(請利用課本上的對數表)[86 學測]答：D

Ex84. 某人上班有甲、乙兩條路線可供選擇。早上定時從家裡出發，走甲路線有 0.1 的機率會遲到，走乙路線有 0.2 的機率會遲到。無論走哪一條路線，只要不遲到,下次就走同一路線，否則就換另一條路線。假設他第一天走甲路線，則第三天也走甲路線的機率為_____.[86 學測]答：0.83

1-3 變異係數

一、變異係數：$C.V.=\dfrac{S}{\overline{X}}\times 100\%$變異係數是一種(標準差)相對測度值

1.定義：變異係數 $C.V.=\dfrac{S}{\overline{X}}\times 100\%$

2.由上面的定義可看出變異係數是將平均值看成 1 時的標準差，因此變異係數愈大表示資料間的變異愈大，否則愈小。

3.變異係數 CV_S 與資料單位無關

Ex85. 某次數學考試，甲班的平均成績為 80 分，標準差為 10 分；乙班的平均成績為 75 分，標準差為 8 分。試問那一班同學的程度比較平均?答：乙班

Ex86. 有甲、乙兩班的數學測驗成績的次數分配表如下：（單位：分）求：
(1)甲班數學成績的標準差變異係數。(2)乙班數學成績的標準差變異係數。
(3)就該次測驗成績而言，那一班較平均？答：11.7%，14.19%，甲班

分數	40～50	50～60	60～70	70～80	80～90	90～100	總計
甲班人數	0	2	21	19	7	1	50
乙班人數	3	4	8	29	6	0	50

二、全距係數及四分位差係數

1.全距係數：

設一筆數值資料中的最大值為 M，最小值為 m，則全距 $R=M-m$，

全距係數 CV_R 定為 $CV_R=\dfrac{\frac{M-m}{2}}{\frac{M+m}{2}}\times 100\%=\dfrac{M-m}{M+m}\times 100\%$

2.四分位差係數：

設一筆數值資料中的第一四分位數為 Q_1，第三四分位數為 Q_3，則

四分位差 $Q.D.=(Q_3-Q_1)$，

四分位差係數 $CV_{Q.D.}$ 定為 $CV_{Q.D.}=\dfrac{\frac{1}{2}(Q_3-Q_1)}{\frac{1}{2}(Q_3+Q_1)}\times 100\%=\dfrac{(Q_3-Q_1)}{(Q_3+Q_1)}\times 100\%$

Ex87. 甲、乙兩組資如下：

甲組：2,10,20,28,38,48,56,65,75,85,92,100

乙組：2,15,16,17,17,18,18,18,19,19,23,100

(1)比較甲、乙兩組的全距與四分位差(2)比較甲、乙兩組的全距係數與四分位差係數。答：(1)甲乙全距相同,但乙組的四分位差較甲組小(2)甲乙的全距係數相同,乙組的四分位差係數較甲組小

Ex88. 小明第二次期中考英文 65 分，數學 58 分，他們班上英文的總平均 63 分，標準差 4.1 分；數學的總平均 52 分，標準差 5.7 分，則(1)全班那科較整齊?(2)對全班同學來說，小明那一科考的較好?答：英文；數學

Ex89. 設有 A，C 兩個國家，A 國國民所得的算術平均數為 30000 美元，標準差為 6000 美元；C 國國民所得的算術平均數為 5000 美元，標準差為 2500 美元。則：(1)A 國國民所得的變異係數為。(2)C 國國民所得的變異係數為。(3)就 A，C 兩國而言，那一個國家貧富不均的情形較嚴重？答：(1)20％(2)50％(3)C 國

Ex90. 若已知一組資料的平均數是 75 公分，變異係數為 18％，則此組資料的標準差是。答：13.5

Ex91. 高三學生共 30 人，參加數學競試的成績的算術平均數為 60 分，標準差為 4 分，現將每位學生的成績除以 2，再加 50 作為新成績，則新成績的算術平均數為，標準差為，變異係數為。答：80；2；2.5％

Ex92. 某次段考甲、乙兩班之成績如下：

試求：(1)兩班之平均與標準差。(2)兩班之變異係數。答：(1) $\overline{x_{甲}}=67$，$S_{甲}=13.6$；$\overline{x_{乙}}=68.5$，$S_{乙}=14.6$(2)$CV_{甲}=20.3\%$，$CV_{乙}=21.3\%$

分數	40～50	50～60	60～70	70～80	80～90	90～100
甲班	2	5	4	6	2	1
乙班	1	6	5	3	3	2

Ex93. 設有一組資料的總和與平方和分別為 $\sum_{i=1}^{10} x_i = 200$，$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 4090$，則此組資料的變異係數 CV_S=_____。（標準差係數）答：15.81％

Ex94. 某生第一次月考六科的平均成績（算術平均）為 80 分，若已知其中五科的成績為 68，80，80，80，86。則其成績的標準差為多少？變異係數為多少？答：6.6；8.25％

Ex95. 某班有 12 同學參加校內員生社金頭腦數學競試，得到的分數分別為 2，10，20，28，38，48，56，65，75，85，92，100，則此 12 位學生競試成績的(1)全距係數為。(2)四分位差係數為。答：(1)96％(2)54％

Ex96. 設有 8 個數值 1，2，4，5，5，6，8，10，試求：(1)全距係數。(2)四分位差係數。(3)標準差係數。答：(1)81.8％(2)40％(3)57.6％

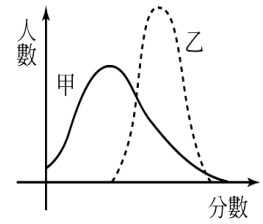
Ex97. 某次測驗有 50 人參加，其成績分配如下：

試求：(1)全距係數。(2)四分位差係數。(3)標準差係數。

答：(1)45.5％(2)27.7％(3)20.7％

分數	30～40	40～50	50～60	60～70	70～80
人　數	5	10	10	20	5

Ex98. 某年聯考甲、乙兩科成績的直方圖如圖所示（由於考生人數眾多，成績分布的直方圖可視為平滑的曲線），則下列那些敘述是正確的？



(*A*)甲的中位數比乙的中位數大

(*B*)甲的全距比乙的全距大

(*C*)甲的算術平均數比乙的算術平均數大

(*D*)甲的標準差比乙的標準差大

(*E*)甲的變異係數比乙的變異係數大答：(1)*BDE*

1-4 相關係數

一、相關：

1.相關：兩種或兩種以上變數間的相互關係稱為相關，如身高與體重之關係

2.相關的類別：

(1)依變數的多寡分：簡單相關(兩變數間)、複相關(三個或三個以上變數間)

(2)依相關的形態分：直線相關、曲線相關

(3)依相關的方向分：正相關(變動方向一致者)、負相關(變動方向相反者)

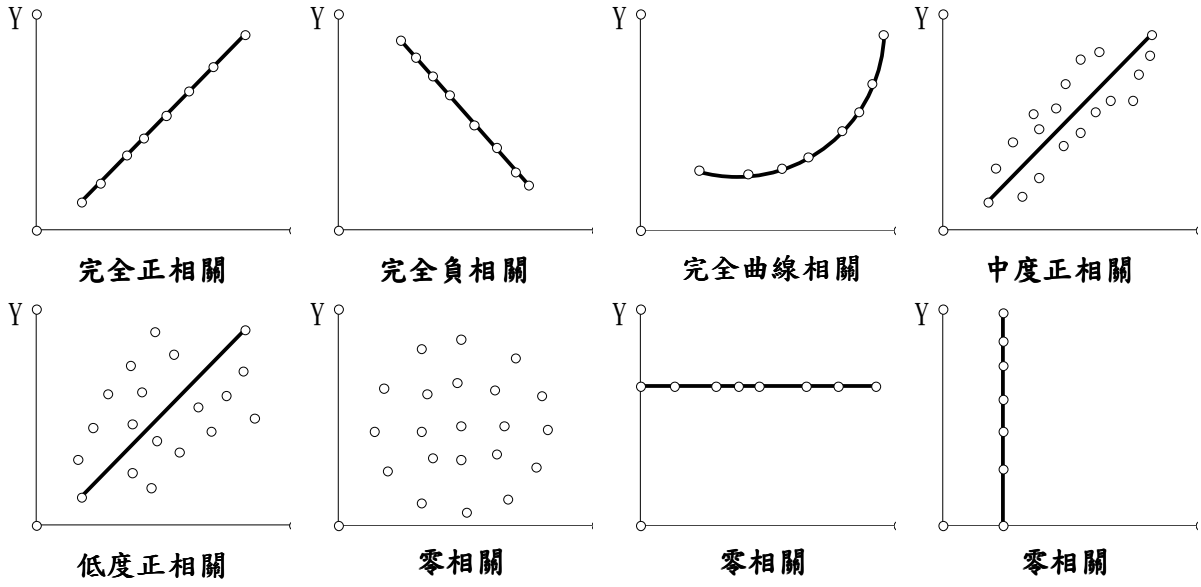
(4)依相關的程度分：完全相關(直線或曲線)、不完全相關(大致)、零相關(無關)

二、散佈圖：將兩變數在坐標圖中繪出,以便初步觀察相關程度與方向的圖形

即兩變量 X：$x_1, x_2, \cdots, x_n$；Y：$y_1, y_2, \cdots, y_n$在平面坐標系上繪出

點 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)、⋯、(x_n, y_n)所得的點集圖

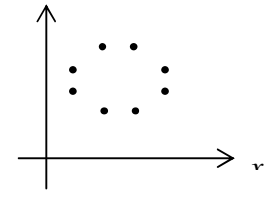
1.散佈圖的形態：



Ex99. 右圖表兩組數據 x，y 的分佈圖，

試問其相關係數 r 最接近下列何值？

$(A)1(B)0.5(C)0(D)-0.5(E)-1$答：$C$



三、相關係數：

用以測量兩變數間的直線相關程度大小及正負方向的量數，以 r 表示

1.定義：$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})\cdot(y_i-\overline{Y})}{(n-1)\cdot S_X\cdot S_Y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})\cdot(y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2}}=\dfrac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}}\sqrt{S_{YY}}}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\overline{X}\cdot\overline{Y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{X}^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{Y}^2}}$

新定義符號：(離均差)

$S_{XY}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{X}\right)\left(y_i-\overline{Y}\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{X}\cdot\overline{Y}$　　註：XY 離均差之積和

$S_{XX}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{X}^2$　　註：XX 離均差之積和

$S_{YY}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{Y}^2$　　註：YY 離均差之積和

已定義之舊符號：(標準差)

$S_X=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}$　　註：離均差之方均根

$S_Y=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2}$

2.性質：

(1) $|r|$ 愈大表示兩變量之間的相關程度愈大

(2) $-1\le r\le 1$(由柯西不等式證得)

(pf)：由柯西不等式知：$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2\ge(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y}))^2$

$\therefore r^2=\dfrac{[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})]^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2}\le 1$，即 $-1\le r\le 1$

(3) $r=+1$ 表示完全正相關；

$r=-1$ 表示完全負相關；

$0.7\le|r|<1$ 表示高度相關；

$0.3\le|r|<0.7$ 表示中度相關；

$0<|r|<0.3$ 表示低度相關；

$r=0$ 表示零相關

3.觀念：

(1)若 X 與 Y 成正直線相關，則大部分的點分布於第一或第三象限內(相對於 $x=\overline{X}$與$y=\overline{Y}$)且相關程度愈高，則密集於第一或第三象限內的點愈多

$\therefore \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})$之值愈大

(2)若 X 與 Y 成負直線相關，則大部分的點分布於第二或第四象限內(相對於 $x=\overline{X}$與$y=\overline{Y}$)且相關程度愈高，則密集於第二或第四象限內的點愈多

$\therefore \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})$之絕對值愈大

(3)因此$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})$之值的正負及大小恰好反應出兩變量 X 與 Y 的相關程度之正負及大小，所以，稱$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})$為 X 與 Y 的共變異數，用符號 $CoV(X,Y)$表示。(即 $S_{XY}=n\cdot Cov(X,Y)$)

(4)當變量 X 或 Y 增大為 k 倍時，標準差 S_X 或 S_Y 及共變異數 $CoV(X,Y)$均隨之增大為 k 倍，故其相關係數不變(若乘負，r 要變號)

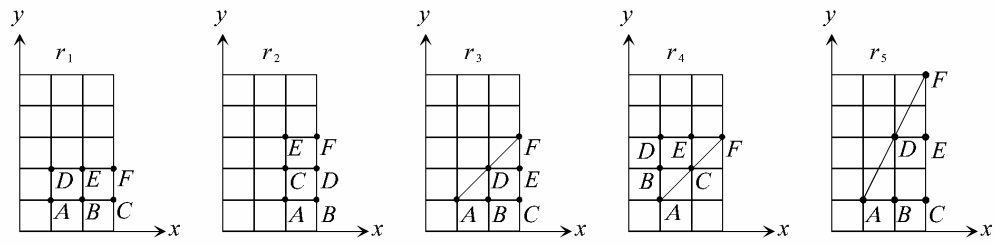
Ex100. 某城市的成人關於身高及體重的資料列表如下：

身高 X(公分)	145～155	155～165	165～175	175～185	185～195
平均體重 Y(公斤)	52	56	59	63	68

設 X，Y 二者的相關係數 r；則下列何者為正確？

$(A)-1\le r\le -0.7$ $(B)-0.7<r<-0.3$ $(C)-0.3\le r\le 0.3$ $(D)0.3<r<0.8$ $(E)0.8\le r<1$ 答：E

Ex101. 下圖中，有五組數據，每組各有 A，B，C，D，E，F等六個資料點：



設各組的相關係數由左至右分別為 r_1，r_2，r_3，r_4，r_5，則下列關係式，何者為真？$(A)r_1=r_2$ $(B)r_2<r_3$ $(C)r_3<r_4$ $(D)r_3<r_5$ $(E)r_4=r_5$ 答：ABE

Ex102. 隨機抽檢 10 位國小學童的體重(X)與血壓(Y)資料,得下列數據：

$\sum_{i=1}^{10}X_i=450$，$\sum_{i=1}^{10}X_i^2=21250$，$\sum_{i=1}^{10}Y_i=1300$，$\sum_{i=1}^{10}Y_i^2=171250$，$\sum_{i=1}^{10}X_iY_i=59100$，

試求 X 與 Y 的相關係數答：0.4

四、最小平方法：

1.定義:對給定的有限個數對 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),.....,(x_n,y_n)$,求出一個線型函數 $f(x)=mx+c$,

使得誤差的平方和 $E=[f(x_1)-y_1]^2+[f(x_2)-y_2]^2+...+[f(x_n)-y_n]^2$ 為最小。

2.幾何意義：把 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),.....,(x_n,y_n)$

看成是坐標平面上的點如圖所示,

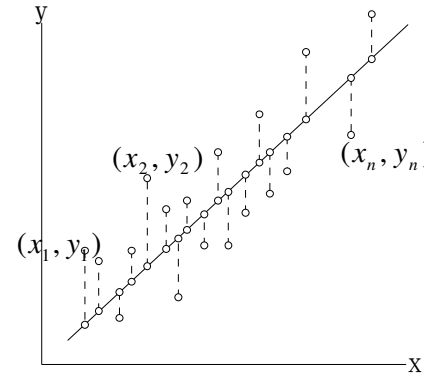
然後找出一條直線 $y=f(x)=mx+c$,

使得圖中 n 段鉛垂線段的長度平方和為最小。

在經濟學與統計學中,此直線通常稱為

Y 對於 X 的迴歸直線或稱為最適合直線

或最小偏差直線



五、最適合直線：

1.當 x 與 y 兩種抽樣數據的相關係數的絕對值很大時，這時 x 與 y 散布圖上會有一條模糊直線，顯示出兩者之間的線性關係。如何把這種線性關係明顯表現出來，使誤差值的平方和最小，這就是<u>最小平方法</u>。

2.想法：設一組資料：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),.....,(x_n,y_n)$

設直線 $L: y=f(x)=mx+c$

(1)殘差 $e_i=y_i-f(x_i)=y_i-(mx_i+c)$

(2)殘差平方和 $\sum_{i=1}^{n}e_i^{\,2}=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(mx_i+c)]^2$

(3)<u>殘差平方和</u>愈小時，以此直線 L 擬合資料的誤差愈小，估計效果愈理想

註：因誤差取 $y_i-f(x_i)$ 時，為避免可正可負，故取平方運算

3.做法：將 $\sum_{i=1}^{n}[y_i-(mx_i+c)]^2$ 展開，以<u>雙變數配方法</u>求最小值，即可得下列方程組

註：過程請參閱附錄一、附錄二

(1)解方程組 $\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}y_i=m(\sum_{i=1}^{n}x_i)+(\sum_{i=1}^{n}1)c \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i=m(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2})+(\sum_{i=1}^{n}x_i)c\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$ 可得 m、c

註 1：第一式左右同除以 n，可得算術平均 $\overline{X}$、$\overline{Y}$

註 2：第二式形似第一式的 Σ 內部同乘 x_i

(2)結論公式：$(y-\overline{Y})=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})\cdot(y_i-\overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}(x-\overline{X})$，亦可表為 $(y-\overline{Y})=\dfrac{S_{XY}}{S_{XX}}(x-\overline{X})$

4.性質：

(1)最適合直線必通過點 $(\overline{X},\overline{Y})$

(2)最適合直線的斜率 $m=\dfrac{S_{XY}}{S_{XX}}$

(3)由點斜式(1)(2)可得最適合直線之方程式

(4)相關係數 $r=\dfrac{S_{XY}}{(n-1)S_X S_Y}=\dfrac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}}\sqrt{S_{YY}}}$

5.m 與 r 的關係：$m=r\cdot\dfrac{S_Y}{S_X}$

$$(pf)：\ m=\frac{S_{XY}}{S_{XX}}=\frac{S_{XY}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}=\frac{S_{XY}}{(n-1)S_x^2}=\frac{S_{XY}}{(n-1)S_X S_Y}\cdot\frac{S_Y}{S_X}=r\cdot\frac{S_Y}{S_X}$$

附錄一

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-(mx_i+c)]^2=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i^2+m^2x_i^2+c^2-2mx_iy_i-2cy_i+2cmx_i\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}y_i^2+m^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\cdot c^2-2m\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-2c\sum_{i=1}^{n}y_i+2cm\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$=m^2\left\{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}+m\left\{2c\sum_{i=1}^{n}x_i-2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right\}+\left\{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2c\sum_{i=1}^{n}y_i+n\cdot c^2\right\}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\left\{m+\frac{c\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right\}^2+\cdots\cdots$$

當 $m=-\dfrac{c\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ 時有最小值，即 $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=m(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)+(\sum_{i=1}^{n}x_i)c\cdots\cdots(2)$

附錄二

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-(mx_i+c)]^2=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i^2+m^2x_i^2+c^2-2mx_iy_i-2cy_i+2cmx_i\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}y_i^2+m^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\cdot c^2-2m\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-2c\sum_{i=1}^{n}y_i+2cm\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$=c^2\cdot\{n\}+c\cdot\left\{2m\sum_{i=1}^{n}x_i-2\sum_{i=1}^{n}y_i\right\}+\left\{m^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2m\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right\}=n\cdot\left\{c+\frac{m\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}\right\}^2+\cdots\cdots$$

當 $c=-\dfrac{m\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}$ 時有最小值，即 $\sum_{i=1}^{n}y_i=m(\sum_{i=1}^{n}x_i)+(\sum_{i=1}^{n}1)c\cdots\cdots(1)$

Ex103. 某商店統計每天營業時間與營業額如表：

求 y 對 x 的最適合直線。答：$y=-2+\dfrac{6}{5}x$

營業時間(小時)x	4	5	6	7	8
營業額(萬元)y	3	4	5	6	8

Ex104. 若有一組 (x_i, y_i)，$i=1,2,\cdots,10$ 算出標準差 $S_X=2$，$S_Y=8$，若 y 對 x 做最適合直線方程式為 $y=3x+5$，則 x 與 y 的相關係數 r=_____。答：0.75

Ex105. 若 y 對 x 做最適合直線 $y=30+\frac{3}{5}x$，$\bar{x}=60$；且 $s=-\frac{1}{2}x+10$ 與 $t=\frac{1}{6}y-1$；求 t 對 s 的最適合直線

Ex106. 調查全校三年級學生的第一段考數學成績(x)與物理成績(y)，抽查其中 40 位同學，得到平均數、標準差及相關係數如下：

$\overline{X}=70$, $\overline{Y}=65$, $S_x=10$, $S_y=5$, $r=0.8$

(1)物理成績(y)對數學成績(x)的最適合直線為_____。

(2)已知三年級學生中數學成績最高分為 95 分，試推估其物理成績約為_____分。答：y=37+0.4x，75

Ex107. 設平面上有五個點(2，−1)，(1，1)，(−1，2)，(−2，4)，(−3，3)，試求：

(1)Y 對 X 的最適合直線方程式。(2)X 對 Y 的最適合直線方程式。

答：(1)$Y=\frac{-73}{86}X+\frac{111}{86}(2)X=\frac{-73}{74}Y+\frac{87}{74}$

Ex108. 設兩組變數 X 與 Y，若 n=10，Σx_i=14，Σx_i^2=68.6，Σy_i=11，Σy_i^2=48.1，$\Sigma x_i y_i$=28，試求：(1)X 與 Y 的相關係數。(2)Y 對 X 的最適合直線方程式。

答：(1)0.3(2) $y=\frac{9}{35}x+\frac{37}{50}$

Ex109. 求下表 X 和 Y 的相關係數,其為何種相關？

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9

答：0.98，高度正相關

Ex110. 某肥皂廠商欲推出一種新產品，在上市前以不同的單價 x（單位：十元）調查市場的需求量 y（單位：萬盒），調查結果如下：

x	8	9	10	11	12
y	11	12	10	8	9

問 x 和 y 的相關係數是接近下列那一個值？

$(A)\frac{4}{5}(B)\frac{2}{5}(C)0(D)-\frac{2}{5}(E)-\frac{4}{5}$ 答：E

Ex111. 10 位學生之國文與數學成績列表如下：

考生編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
國文	89	65	76	69	82	57	66	72	78	66
數學	75	57	65	65	83	63	58	62	63	69

今已算出國文成績之標準差為 8.9(取至小數點第一位)，數學成績之標準差為 7.5(取至小數點第一位)，則此 10 位考生兩科成績之相關係數最接近
$(A)-0.85(B)0.25(C)0.66(D)0.78(E)0.85$ 答：C

Ex112. 下列敘述何者是正確的？
(A)某次段考，甲班學生國文的標準差為 5 分，乙班學生國文的標準差為 4.5 分，則甲班的國文程度較乙班的國文程度差異性大(B)通常對成長的兒童而言，身高與體重呈正相關，但百米賽跑，體重與速度呈負相關(C)設兩變數 X 與 Y 有 n 個變量，若 $Y=2X-3$，則 X 與 Y 呈完全直線正相關(D)設三變數 X，Y，Z，若 $r_{XY}=0.3$，$r_{XZ}=-0.6$，則 X 與 Y 的相關程度較的 X 與 Z 的相關程度為高。
答：BC

Ex113. 有兩組變量 X 與 Y,現在得知 10 個數量 (x_k, y_k),知 $\sum_{k=1}^{10} x_k = 11, \sum_{k=1}^{10} x_k^2 = 32.1$，$\sum_{k=1}^{10} y_k = 14$，$\sum_{k=1}^{10} y_k^2 = 39.6$，$\sum_{k=1}^{10} x_k y_k = 28$，試求 X 與 Y 的直線相關係數 r
答：0.63

Ex114. 利用最小平方法，求得最接近點(1，2)，(6，7)，(3，3)，(5，4)之最適合直線方程式為？答：$y=\frac{41}{59}+\frac{52}{59}x$

Ex115. 設有 10 筆$(x_1$，$y_1)$的資料，$S_x=6$，$S_Y=2$，且相關係數 $r=0.9$，則 y 對 x 做迴歸，其迴歸直線的斜率為？$(A)0.4(B)0.64(C)0.3(D)1(E)1.6$ 答：C

Ex116. 若一組資料 x，y 的相關係數 $r=0.6$ 且 $\overline{x}=60$，$\overline{y}=42$，$S_x=4$，$S_y=3$，
(1)求 y 對 x 的迴歸式(2)求 x 對 y 的迴歸式
答：(1) $Y=42+0.45(X-60)$ (2) $\hat{X}=60+0.8(Y-42)$

Ex117. 莊家有一條船，其耗油率好像與船的時速有關，假設今有如下的樣本資料：

速　度 X（哩／時）	6	11	21	28	32
耗油率 Y（加侖／時）	2.3	4.8	7.5	9.2	12.0

(1)試求耗油率 Y 對速度 X 的迴歸直線（最適合直線）。
(2)並問下次如果船的速度是每小時 35 哩，則可預估耗油率是每小時多少加侖。答：(1)$y=0.535+0.338x$(2)12.4（加侖／時）

Ex118. 資源班新進 12 位同學，在進班前先作學前測驗，然後給予補救教學輔導後，再予測驗，下表是 12 位同學輔導教學前後之測驗成績如下表所示：

同學座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
輔導前成績 X	33	40	38	30	36	50	25	41	22	35	40	30
輔導後成績 Y	45	54	58	42	54	73	37	31	25	70	63	48

已知 $\overline{x}=35$，$\overline{y}=50$，試求：

(1)輔導前後成績的相關係數。(2)求最適合這 12 對成績 Y 對 X 的直線方程式。

答：(1)0.69(3)$Y=50+1.34(X-35)$

Ex119. 研究 10 位學生某次段考甲、乙兩學科測驗成績的相關性，設其相關係數為 r。若已知此 10 位學生的成績如下：

學生代號	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	總計
甲科測驗	3	4	8	9	5	6	7	7	6	5	60
乙科測驗	9	8	5	6	7	6	5	7	8	9	70

求(1)甲科對乙科的最適合直線。(2)乙科對甲科的最適合直線。

答：(1)$X=-0.95Y+12.65$(2)$Y=-0.64X+10.84$

Ex120. 設兩變量 X 與 Y 的相關係數 $r(X,Y)=0.6$,則 $r(3X+5,3Y+5)=$_____答:$r=0.6$

Ex121. 已知 20 個樣本的資料如下：$\sum_{i=1}^{20}x_i=160$, $\sum_{i=1}^{20}y_i=240$, $\sum_{i=1}^{20}x_i^2=1536$, $\sum_{i=1}^{20}x_iy_i=1832$，則 y 對 x 的迴歸線方程式為_____答：$y=\frac{59}{4}-\frac{11}{32}x$

Ex122. 設 100 對樣本點$(x_i，y_i)$的資料，已知 $\overline{x}=20$，$\overline{y}=30$，$\sum(x_i-\overline{x})^2=25$，$\sum(y_i-\overline{y})^2=36$，$\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=-10$，求：(1)兩變數 X 與 Y 的相關係數(2)Y 對 X 的最適合直線方程式。答：(1)-0.33(2)$Y=-0.396X+37.92$

Ex123. 令 X 代表每個高中生平均每天研讀數學的時間(以小時計),則 $W=7(24-X)$ 代表每個高中生平均每週花在研讀數學以外的時間。令 Y 代表每個高中生數學學科能力測驗的成績。設 X,Y 之相關係數為 R_{XY},W,Y 之相關係數為 R_{WY},則 R_{XY} 與 R_{WY} 兩數之間的關係,下列選項何者為真？(1)$R_{WY}=7(24-R_{XY})$(2)$R_{WY}=7R_{XY}$ (3)$R_{WY}=-7R_{XY}$(4)$R_{WY}=R_{XY}$(5)$R_{WY}=-R_{XY}$[90 學測]答：E